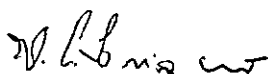


LARGURAS EFETIVAS DE LAJES SEM VIGAMENTO EM PRÉDIOS
LATERALMENTE CARREGADOS

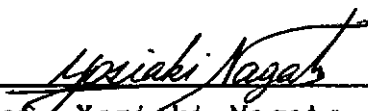
Paulo Fernando Neves Rodrigues

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

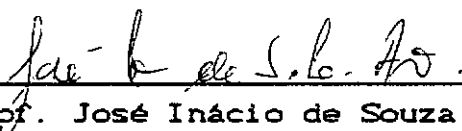
Aprovada por :



Prof. Humberto Lima Soriano, D. Sc.
(Presidente)



Prof. Yosiaki Nagato, D. Sc.



Prof. José Inácio de Souza Leão Ávila, PhD

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Maio - 1989

RODRIGUES, PAULO FERNANDO NEVES

Larguras Efetivas de Lajes Sem Vigamento em Prédios Lateralmente Carregados [Rio de Janeiro] 1989.

viii, 98 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1989).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Estruturas	I. COPPE/UFRJ	II. Título
(Série).		

"Não há espinhos sem rosas"

(Chiara Lubich)

AGRADECIMENTOS

A Marlene e José Fernando, meus pais,

Ao prof. Humberto Lima Soriano,

Ao prof. José Inácio de Souza Leão Ávila,

Ao prof. Yosiaki Nagato,

Ao prof. Amaro José do Rego Pereira,
(in memoriam),

Ao prof. Sílvio Romero Frej da Fonseca Lima,

Ao geólogo Everardo de Almeida Maciel,

Ao prof. Manoel Ramalho Machado de Azevedo,

Ao prof. Ailton Guedes Alcoforado,

Ao prof. Fernando Venâncio Filho,

Ao prof. Webe João Mansur,

Aos demais professores da COPPE/UFRJ,

A Liseane Morosini,

A Simone Revoredo Cantarelli,

A Paulo Roberto Maciel Lyra,

A Paulo de Araujo Regis,

A Célio Noia Miranda,

A CAPES e a todos que colaboraram na realização
desse trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

LARGURAS EFETIVAS DE LAJES SEM VIGAMENTO EM PRÉDIOS
LATERALMENTE CARREGADOS

Paulo Fernando Neves Rodrigues

Maio de 1989

Orientador : Humberto Lima Soriano

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo apresentar valores para larguras efetivas de lajes sem vigamento, em prédios lateralmente carregados, obtidos através do método dos elementos finitos.

Trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores também foram expostos. Os resultados foram comparados e conseqüentes conclusões formuladas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

EFFECTIVE WIDTHS OF LATERALLY LOADED FLAT PLATES FLOORS

Paulo Fernando Neves Rodrigues

May, 1989

Thesis Supervisor : Humberto Lima Soriano

Department : Civil Engineering

This work aims to present values for effective widths of laterally loaded flat plates floors using the finite element method.

Works developed by other researchers are also presented. The results are compared and consequent conclusions are formulated.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
I.1 - Tipos de Lajes	03
I.2 - Escolha do Tipo de Lajes	06
I.3 - Largura Efetiva de Lajes	09
 CAPÍTULO II - OS MÉTODOS PROPOSTOS POR KHAN E SBAROUNIS (1964) E FRASER (1983) PARA OBTENÇÃO DE LARGURAS EFETIVAS DE LAJES	 18
II.1 - O Método Proposto por Khan e Sbarounis	18
II.1.1 - Considerações Gerais	18
II.1.2 - Metodologia	19
II.1.3 - Resultados e Conclusões	22
II.2 - O Método proposto por Fraser	25
II.2.1 - Considerações Gerais	25
II.2.2 - Análise por Meio de Elementos Finitos .	27
II.2.3 - Resultados e Conclusões	30
 CAPÍTULO III - OS MÉTODOS PROPOSTOS POR PECKNOLD (1975), ALLEN E DARVALL (1977) E WONG E COULL (1980) PARA OBTENÇÃO DE LAR- GURAS EFETIVAS DE LAJES	 34
III.1 - O Método Proposto por Pecknold	34
III.1.1 - Considerações Gerais	34
III.1.2 - Metodologia	35
III.1.3 - Resultados e Conclusões	38

III.2 - O Método proposto por Allen e Darvall	41
III.2.1 - Considerações Gerais e Metodologia ..	41
III.2.2 - Resultados e Conclusões	42
III.3 - O Método proposto por Wong e Coull	47
III.3.1 - Introdução e Considerações Gerais ...	47
III.3.2 - Metodologia	48
III.3.3 - Resultados e Conclusões	55
 CAPÍTULO IV - OBTENÇÃO DE LARGURAS EFETIVAS DE LAJES SEM VIGAMENTO POR MEIO DO MÉTODO DOS ELE- MENTOS FINITOS	 62
IV.1 - Formulação da Largura Efetiva de Lajes sem viga- mento em prédios lateralmente carregados	62
IV.2 - Tipo do Elemento Utilizado na Análise e Metodo- logia	66
IV.3 - Resultados e Conclusões	72
 CAPÍTULO V - CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABA- LHOS POSTERIORES	 89
V.1 - Conclusões Finais	89
V.2 - Sugestões	91
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 93

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Apesar dos avanços na tecnologia computacional não é prático em análise de edificações lateralmente carregadas discretizar as lajes por meio de elementos finitos. Por essa razão surge a idéia de se considerar faixas de lajes que trabalhem como elementos de viga.

É recomendado pelas normas [1,2] que o valor da largura efetiva de laje seja igual à distância transversal entre as colunas, denominada por muitos pesquisadores "largura inteira de painel". Mas, apesar da simplicidade para definir, obter e utilizá-la, não há razões para que se adote uma largura efetiva constante independentemente de parâmetros por demais importantes como as dimensões de coluna, relação entre as dimensões das lajes, etc.

Baseando-se na prática, muitos calculistas consideram somente uma parte da largura total da laje para definir o elemento de viga. A fim de quantificar essa largura com maior precisão, diversos métodos foram propostos [3,4,5,6,7].

O objetivo desse trabalho é justamente esse : determinar larguras efetivas de lajes por meio do método dos elementos finitos, comparando-as com valores obtidos em outras metodologias apresentadas na literatura. É de

interesse particular o estudo de lajes em pavimentos sem vigamento para prédios lateralmente carregados, pois o caso de lajes com vigamento já é bastante explorado.

No capítulo II, a exposição se prende aos métodos apresentados por KHAN e SBAROUNIS [3], e FRASER [4]. No primeiro trabalho, os autores utilizam elementos de vigas que se interceptam e, no segundo, malhas de elementos finitos. Em ambos, os resultados foram comparados com modelos experimentais.

O capítulo III expõe os métodos que utilizaram análise de Levy (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER [8]) : PECKNOLD [5]; ALLEN e DARVALL [6]; WONG e COULL [7]. No conjunto, todos os métodos estudados ofereceram subsídios para que se chegasse a um bom termo de comparação.

No capítulo IV, a análise por elementos finitos leva à obtenção de valores para larguras efetivas em prédios lateralmente carregados através da aplicação de um momento unitário na coluna circundada por uma região de laje, considerando-se condições de contorno adequadas.

Através da análise desses resultados e o estudo dos métodos anteriormente citados, chega-se ao capítulo V, onde são expostas as conclusões e, ainda, sugestões para trabalhos posteriores ligados ao assunto. Além disso, o capítulo V ressalta não só a importância, mas também, a utilidade que os resultados obtidos no presente trabalho

trarão para os escritórios de projetos.

I.1 - Tipos de Lajes

As lajes de concreto armado têm sido aplicadas de diversas formas no decorrer da história. Algumas derivaram de antigos pavimentos de madeira, apoiadas em barras de aço, ferro , ou mesmo, madeira. Outras foram simplesmente criadas de acordo com a necessidade e não se basearam em nenhum modelo já existente, para que fossem melhor aproveitadas as propriedades do aço e do concreto.

A mudança que se processa na utilização das lajes é fruto de uma série de fatores, tais como economia e desenvolvimento dos métodos de construção, exigências no projeto de arquitetura e tipos de solicitações de carga. Entre outros, esses fatores certamente continuarão contribuindo para a modificação nos tipos de lajes a serem construídas.

Basicamente as lajes podem ser divididas em dois grandes grupos. A saber : apoiadas sobre vigas localizadas em todos os lados de cada painel e lajes sem vigamento. Estas, por sua vez, podem possuir vigas nos bordos do pavimento da estrutura e em volta de grandes aberturas, como as de elevador e escada.

Denominadas como lajes "cogumelos" ou "fungiformes", em português, as lajes sem vigamento podem ter ou não ábacos ou capitéis, conforme as figuras I.1 e I.2.

Simplificação da laje da figura I.2, seria a laje somente com ábaco ou somente com capitel, como mostram as figuras I.3 e I.4, respectivamente.

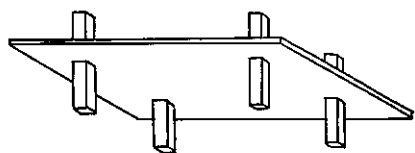


Fig. I.1 - Laje cogumelo sem ábaco ou capitel.

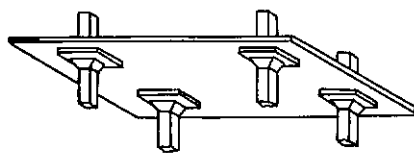


Fig. I.2 - Laje cogumelo com ábacos e capitéis.

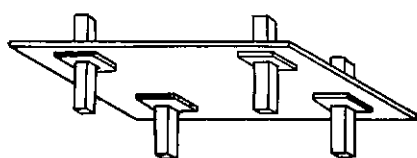


Fig. I.3 - Laje cogumelo com ábacos.

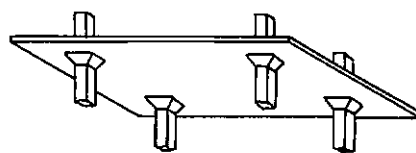


Fig. I.4 - Laje cogumelo com capitéis.

As figuras I.5 e I.6 apresentam lajes apoiadas em vigas, comumente denominadas de lajes armadas em uma ou duas direções, conforme a razão entre os lados da mesma. Quando esta razão for maior do que 2 ou inferior a 0,5, a laje é considerada armada em uma direção (figura I.5); quando estiver situada no intervalo de 0,5 a 2, a laje será considerada armada em duas direções (figura I.6).

A laje nervurada, estrutura mostrada na figura I.7, é formada por uma série de vigas que se interceptam localizadas em distâncias pequenas em relação ao vão da laje. Essas vigas servem de apoio para uma laje fina. A

laje nervurada é uma estrutura geralmente usada quando se necessita de vãos relativamente grandes.

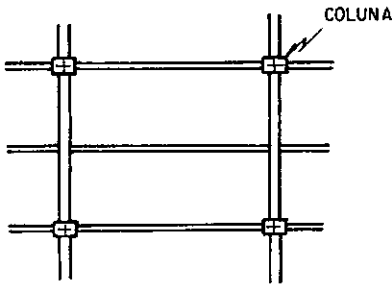


Fig. I.5 - Laje armada em uma direção (planta)

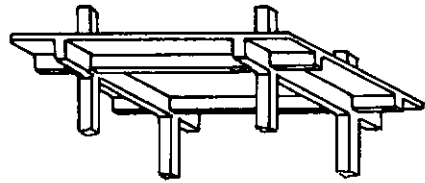


Fig. I.6 - Laje armada em duas direções.

As figuras I.7 e I.8 mostram duas combinações possíveis de lajes nervuradas. As regiões maciças próximas às colunas no arranjo da figura I.7, podem ser consideradas como ábacos ou capitéis, uma vez que combatem o esforço cortante e fornecem uma área extra em regiões de tensões altas devido aos momentos negativos nos topos dos pilares. As regiões maciças da figura I.8, ao longo das linhas das colunas, podem ser consideradas por analogia como vigas, desde que são áreas de rigidez à flexão.

Além das lajes em concreto armado existem as lajes em concreto protendido (lajes maciças, em sua maioria de espessura constante, sem capitéis ou ábacos, sem vigas exceto, às vezes, nos bordos e que devido à protensão aplicada, podem

vencer grandes vãos, muito maiores do que aqueles vencidos por lajes de concreto armado), etc.

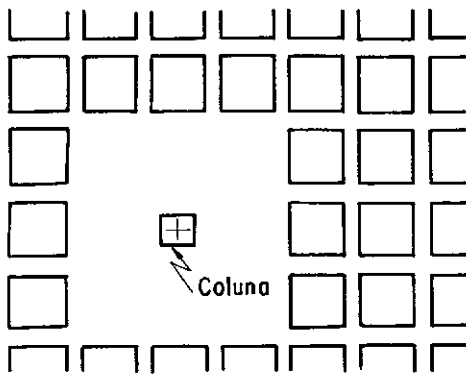


Fig. I.7 - Laje nervurada
(com ábacos)

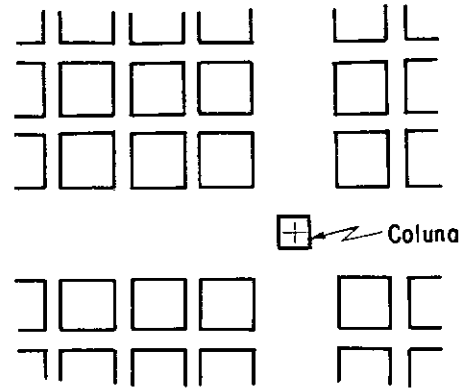


Fig. I.8 - Laje nervurada
(com vigas nas linhas das colunas)

I.2 - Escolha do Tipo de Lajes

Sem menosprezar a importância de fatores como economia, vãos a serem vencidos, funcionalidade e resistência, a escolha da utilização de ábacos ou capitéis, para lajes sem vigamento, é geralmente um problema de carga e vão. Quando não há a presença desses elementos, a resistência da laje é geralmente uma função do esforço cortante nas colunas. Segundo PARK e GAMBLE [9], para cargas e vãos maiores que aproximadamente $4,8 \text{ kN/m}^2$ e 7 a 8 m, respectivamente, a laje com ábacos ou capitéis é freqüentemente a melhor escolha. Caso exigências de arquitetura ou outras quaisquer determinem que não deve haver ábacos ou capitéis, o esforço cortante pode ser

resistido através de "metal shear heads" [9] ou alguma outra forma de armação ao cortante. Porém, vale ressaltar que os custos podem ser altos.

Nas lajes sem vigamento em concreto armado, as flechas são fatores que muitas vezes inviabilizam seu uso. Assim, no caso de grandes cargas, as pequenas flechas admissíveis podem exigir o uso de grandes capitéis. Outro problema que pode surgir levando geralmente ao uso de capitéis, são as fissuras na laje ao redor da coluna devido ao momento negativo atuante. Todos esses problemas podem ser também controlados através de vigas.

No caso em que as dimensões do capitel tornam-se inviáveis, a utilização de laje com vigamento, tal como a da figura I.6, será a que melhor se adapta. Isso porque o uso de vigas moderadamente rígidas reduzirá as deformações de um modo mais eficaz, sem levar em conta que as vigas são facilmente dimensionadas e armadas para o esforço cortante.

Para o caso em que é possível o uso de ambos os tipos de lajes - com ou sem vigamento - a escolha é complexa. Na maioria das vezes a laje com vigamento, devido às grandes alturas efetivas das vigas, acarreta maior economia de material, principalmente do aço. Mas, em termos de fabricação e utilização das fôrmas, concretagem e colocação das armaduras, a laje sem vigamento proporciona uma diminuição substancial do trabalho de mão-de-obra. Além disso, o tempo de construção é bastante reduzido, uma vez que, nesse tipo de estrutura, a construção fica muito simplificada em relação às

estruturas de lajes e vigas.

Por sua vez, as lajes sem vigamento que possuem capitéis ou ábacos, demandam mais trabalho de mão-de-obra do que a mesma sem estes elementos. O custo pode, então, ser diminuído através da aquisição de formas pré-fabricadas. A construção de lajes com vigamento requer maior trabalho que as lajes sem vigamento. A menos que se tenha razões estruturais, a laje com vigamento é pouco construída quando a mão-de-obra é cara. O inverso se dá onde o aço é o item mais caro.

Em termos de estética as lajes sem vigamento são as que melhor se ajustam proporcionando ambientes com melhor iluminação, mais ventilados e com menor ocorrência de aracnídeos. Uma outra vantagem apresentada por este tipo de laje é quanto à instalação hidráulica e de condutores elétricos. Pode-se também tirar proveito quando se quer reduzir a altura total do prédio, diminuindo a altura de cada piso. Em locais em que altura é um fator limitante, esta medida pode resultar no ganho de, aproximadamente, um pavimento a cada dez andares, em relação a um prédio com mesma altura livre de pavimento, construído com lajes com vigamento. Daí, podem surgir outras economias como menor altura do poço do elevador e canalização hidráulica, além da diminuição da área de parede externa (o que ameniza os efeitos da carga de vento e acarreta numa estrutura mais leve). Por consequência, pode ocorrer uma redução no custo das fundações e em outros componentes estruturais.

Muitos estudos foram feitos para análise de

lajes sem vigamento. Contudo, no Brasil, como em outros países, a utilização deste tipo de estrutura está ainda limitada. Uma das razões é a pequena rigidez que estas lajes possuem para resistir aos esforços horizontais de vento em comparação com as estruturas em lajes e vigas. Outro ponto que dificulta o uso desse tipo de estrutura é a cuidadosa verificação à punção da laje, para introdução da reação dos pilares, a ser efetuada.

I.3 - Largura Efetiva de Lajes

O procedimento de idealizar o prédio para efeito de análise estrutural em séries de pórticos planos paralelos com larguras efetivas de lajes, atuando como vigas (figura I.9), é uma técnica muito usada no caso de prédios de pavimentos múltiplos lateralmente carregados, devido ao alto custo que resulta quando se utiliza a discretização das lajes por meio de elementos finitos. Além do que ocorrem dificuldades para a discretização quando não se dispõe de programas sofisticados.

Para o caso de prédios carregados verticalmente, as normas [1,2] apresentam o "método do pórtico equivalente", o qual consiste em dividir o prédio em pórticos planos paralelos e em analisar cada pórtico separadamente (figura I.10). Cada pórtico é formado por uma fila de colunas equivalentes ou suportes e faixas com larguras limitadas lateralmente por linhas centrais dos painéis em cada lado da linha central das colunas ou suportes (figura I.11).

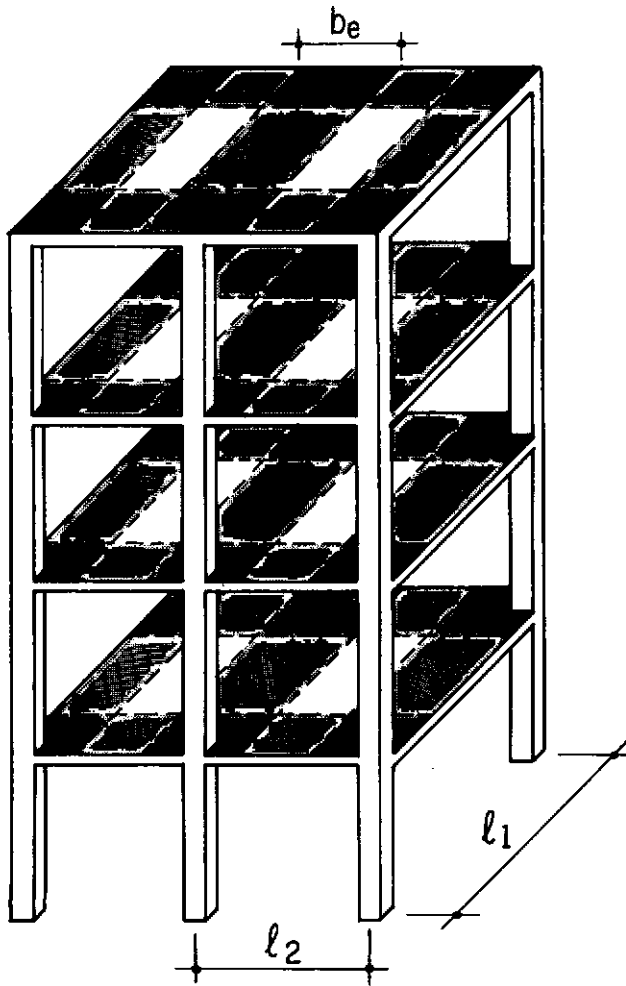


Fig. I.9 - O conceito do pórtico equivalente.

A razão de se considerar estas faixas ou larguras efetivas de lajes limitadas lateralmente da forma descrita anteriormente é que esses planos de corte são considerados como sendo planos de esforço cortante e momento de torção nulos. Essa consideração é exata para planos de simetria e é razoável para painéis interiores de estruturas carregadas com forças gravitacionais. Nos casos em que ocorre simetria, a largura efetiva é igual à

dimensão da laje na direção em que se quer determinar a largura, que é comumente denominada "largura inteira de painel", $b_e = l_2$ (figura I.12).

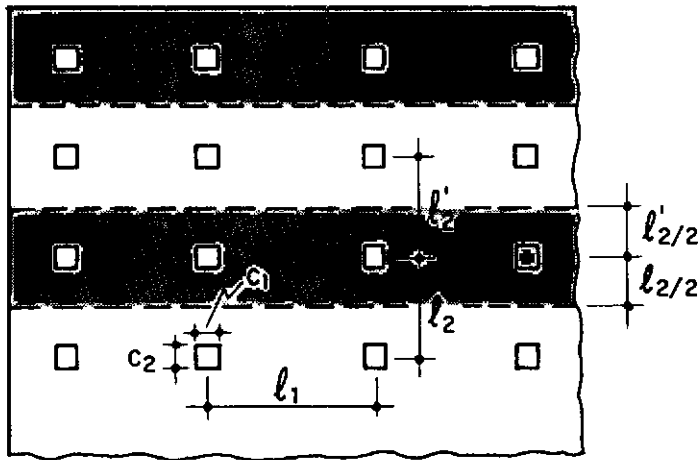


Fig. I.10 - Largura de Faixa com a qual se definiu o pórtico equivalente.

Quando uma estrutura típica de lajes sem vigamento está submetida a carregamento lateral, a deformada de um pórtico composto por uma linha de colunas e a laje ao longo desta linha é mostrada na figura I.13.

Quando se despreza qualquer carregamento vertical ocorrem pontos de inflexão aproximadamente no meio da altura das colunas e no meio do vão da laje. Para efeito de raciocínio, pode-se isolar um elemento típico de placa entre esses pontos de inflexão como mostra a figura I.14a à I.14c.

Para análise, o referido elemento típico pode ser considerado simplesmente apoiado ao longo dos bordos

correspondentes às linhas de inflexão (figura I.14c). Pode ser visto que a declividade longitudinal da placa ao longo da linha transversal da coluna não é constante, e é maior quanto menor for a distância à coluna (figura I.15).

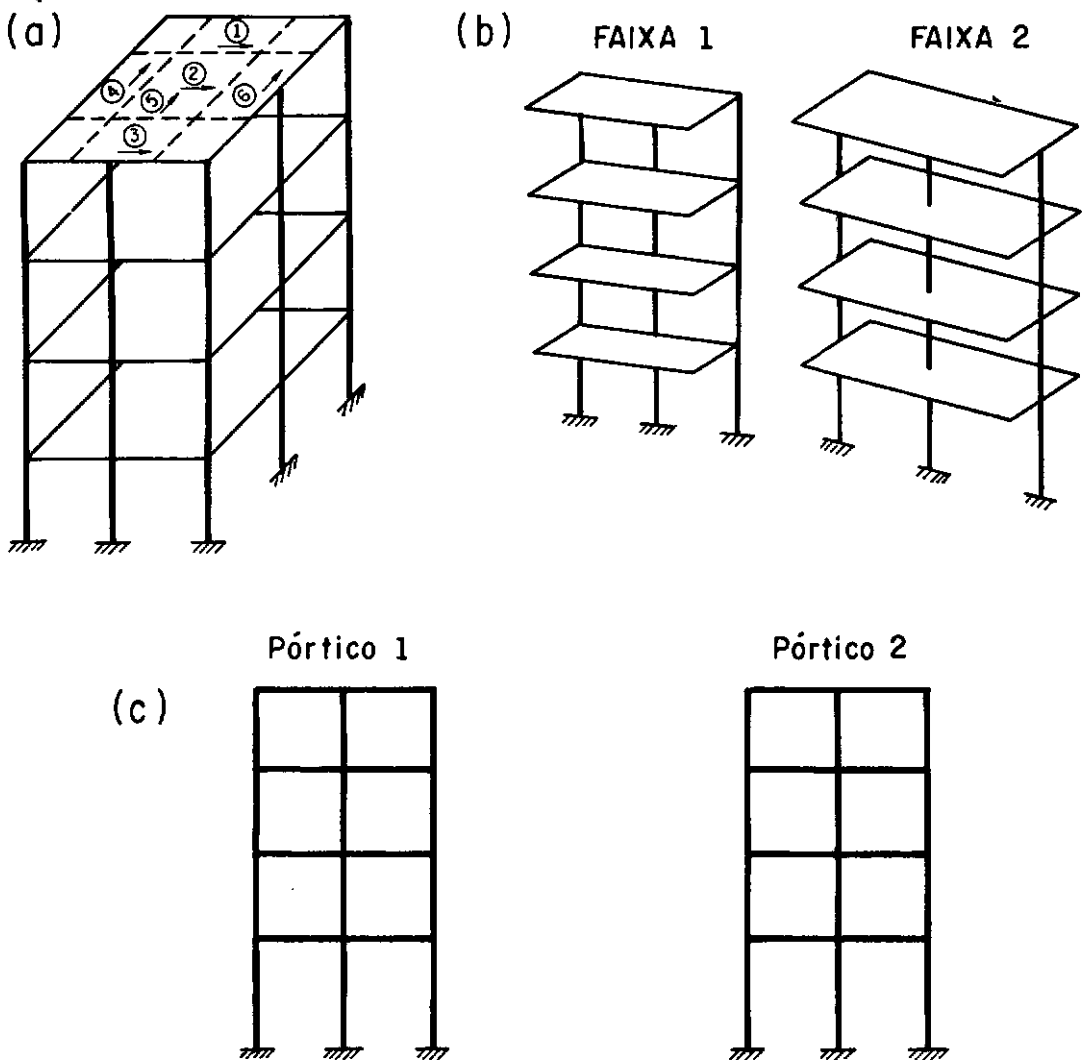


Fig. I.11 - Idealização do conjunto de Pórticos Planos.

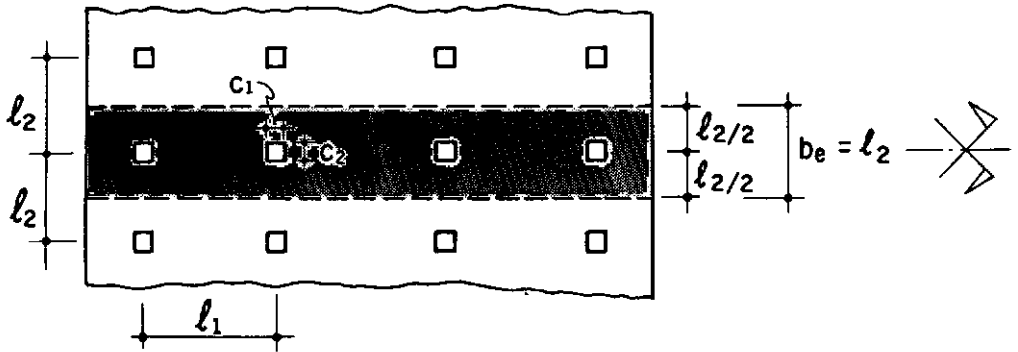


Fig.I.12-Largura inteira de painel.

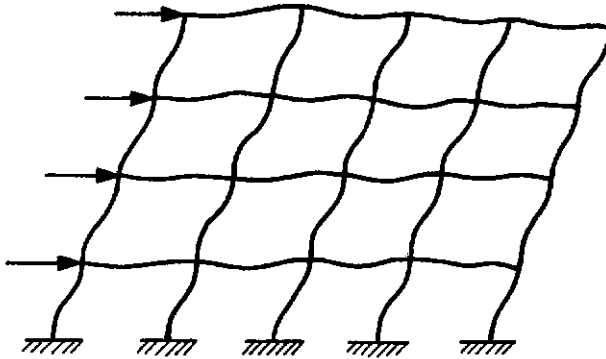


Fig.I.13 - Forma típica da deformada da estrutura no plano das colunas.

Considera-se que a coluna de concreto seja rígida de tal forma que a placa possa ser admitida plana na junção da placa com esta coluna. Contudo, pode-se observar que a placa fora dessa região é mais flexível que

uma viga que possua a seção transversal retangular com altura igual a da placa, porque em uma viga fletida considera-se que a declividade longitudinal é constante em uma dada seção transversal (figura I.16).

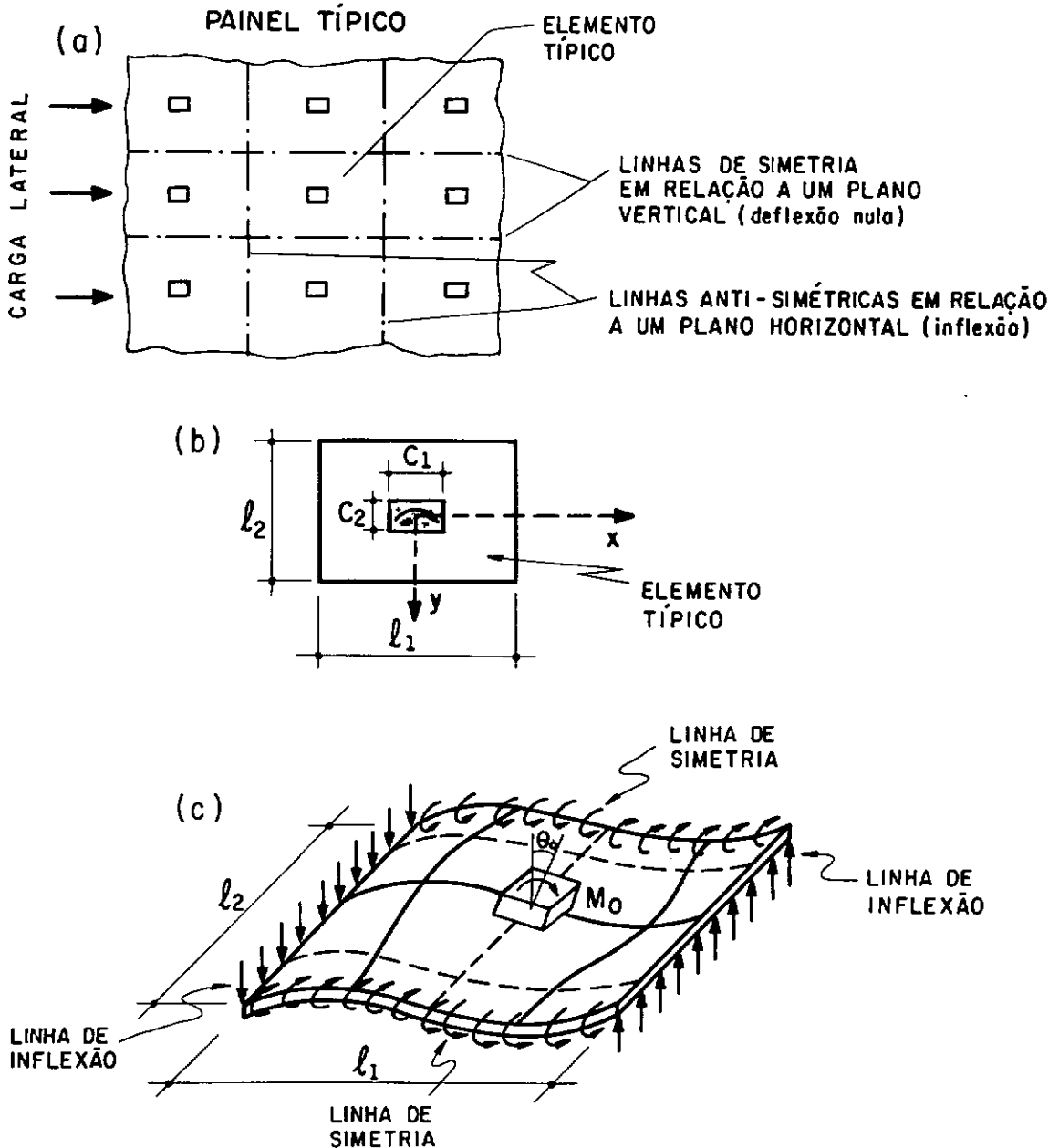


Fig.I.14 - Linhas de simetria e anti-simetria e elemento típico de lajes sem vigaumento.

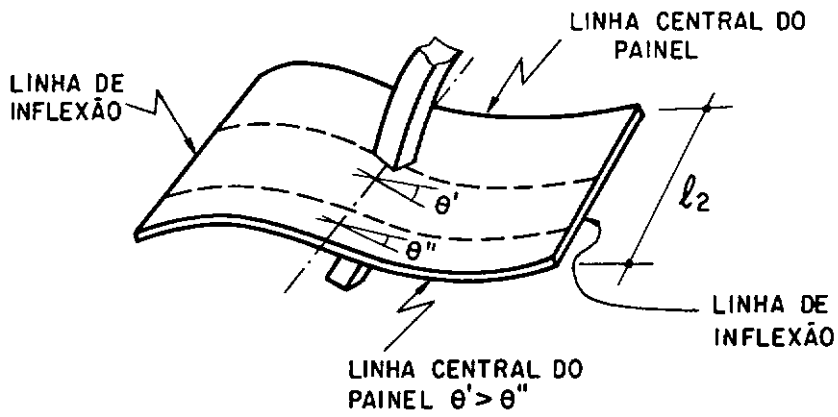


Fig. I.15 - Deformada típica de um elemento formado pela laje e coluna.

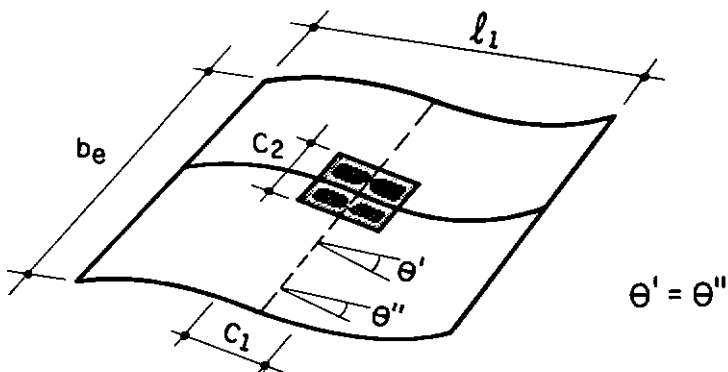


Fig. I.16 - O conceito da viga equivalente.

Assim, para que uma viga que possua a mesma altura da placa tenha uma rigidez equivalente a da laje, deve ser mais estreita do que a largura inteira do painel. Desta forma, a usual adoção de um coeficiente de largura efetiva igual a um, ou seja de uma largura inteira de painel, tem-se mostrado como uma aproximação muito grosseira para a maioria das estruturas típicas.

Segundo ALLEN e DARVALL [6], a largura inteira de painel utilizada no pórtico equivalente pode subestimar seriamente as deflexões devidas à carga lateral de vento, se as rigidezes das colunas não forem reduzidas. Assim, o código do Instituto Americano do Concreto [1] utiliza o conceito de "colunas equivalentes", as quais são menos rígidas do que as colunas reais.

Acerca desse assunto, muitas pesquisas foram feitas e vários métodos propostos para a obtenção da largura efetiva.

O trabalho mais antigo de todos os citados nas referências é o de KHAN e SBAROUNIS [3], que utilizaram malhas de elementos de vigas e um modelo experimental. PECKNOLD [5] utilizou análise de Levy (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER [8]) e séries de Fourier para estimar a largura efetiva de lajes sujeitas a cargas laterais. Divergindo um pouco de PECKNOLD [5], ALLEN e DARVALL [6], também fizeram uso da análise de Levy (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER [8]).

Já WONG e COULL [7] apresentam um método chamado "método do coeficiente de influência" e utilizam igualmente a análise de Levy (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-

KRIEGER [8]) e séries infinitas. Porém, usam o método dos elementos finitos apenas para comparar os resultados. Por fim, FRASER [4] utiliza o método dos elementos finitos para determinação de larguras efetivas de lajes sem viga-mento em prédios lateralmente carregados. No método, ele trabalha com o conceito de coeficiente de rigidez e apresenta duas fórmulas aproximadas para a determinação da largura efetiva, uma para vigas interiores e outra para vigas exteriores. Nenhum dos outros pesquisadores apresenta meio algum para a determinação da largura efetiva de um pórtico exterior.

Os capítulos seguintes discursam sobre os métodos citados e através de estudo comparativo com variação de parâmetros, conseqüentes conclusões são formuladas.

CAPÍTULO II

OS MÉTODOS PROPOSTOS POR KHAN E SBAROUNIS (1964) E FRASER (1983) PARA OBTENÇÃO DE LARGURAS EFETIVAS DE LAJES

II.1 - O Método Proposto por Khan e Sbarounis

II.1.1 - Considerações Gerais

O estudo realizado por KHAN e SBAROUNIS [3] foi baseado num elemento típico idealizado de laje e coluna mostrado na figura I.14c, observando-se que os autores denominaram as dimensões l_1 e l_2 da referida figura como L e l , respectivamente. Nesta é considerada uma parte de um pavimento de lajes sem vigamento limitada por linhas de inflexão na direção do vetor do momento aplicado e pelas linhas médias dos vãos perpendiculares à direção deste mesmo vetor. Foi levado em conta a hipótese desse elemento típico estar simplesmente apoiado ao longo das linhas de inflexão, e apenas com restrição à rotação em torno do eixo dos x nos outros dois bordos.

Inicialmente, para análise de cálculo, o elemento típico foi subdividido em duas séries de seis vigas com alturas iguais à espessura da placa, t , e larguras iguais a $L/6$ ou $l/6$, dependendo da direção a ser considerada. Essas vigas se interceptam como mostrado na figura II.1a.

II.1.2 - Metodologia

Sendo a base das vigas, b , igual a $L/6$ ou $1/6$, os momentos de inércia, rigidezes torsionais e módulo de elasticidade transversal são, respectivamente : $bt^3/12$; $bt^3/3$; $0,4E$. Ainda, equações para flecha e declividade nos pontos de interseção devido a um momento aplicado no centro da coluna, M_o , foram deduzidas levando em conta as rigidezes à flexão e à torção das vigas. A rotação θ_o (figura I.14c), foi igualada a de uma viga com o mesmo momento de inércia da placa, $I = lt^3/12$. Assim, a razão entre o momento e a rotação é dada por :

$$\frac{M_o}{\theta_o} = 12 \frac{EI}{L} = \frac{Elt^3}{L} \quad (II.1)$$

Analogamente, tem-se para a placa :

$$\frac{M_o}{\theta_o} = K \left(\frac{EI}{L} \right) = \frac{K}{12} \left(\frac{Elt^3}{L} \right) \quad (II.2)$$

onde K depende da relação, l/L , entre a largura e o comprimento da laje.

A tabela II.1 apresenta valores de K para alguns valores de l/L .

l/L	0	0,5	1,0	1,5
K	12	7,87	5,26	3,92
$K/12$	1	0,656	0,438	0,326

Tabela II.1 - Valores de K para l/L

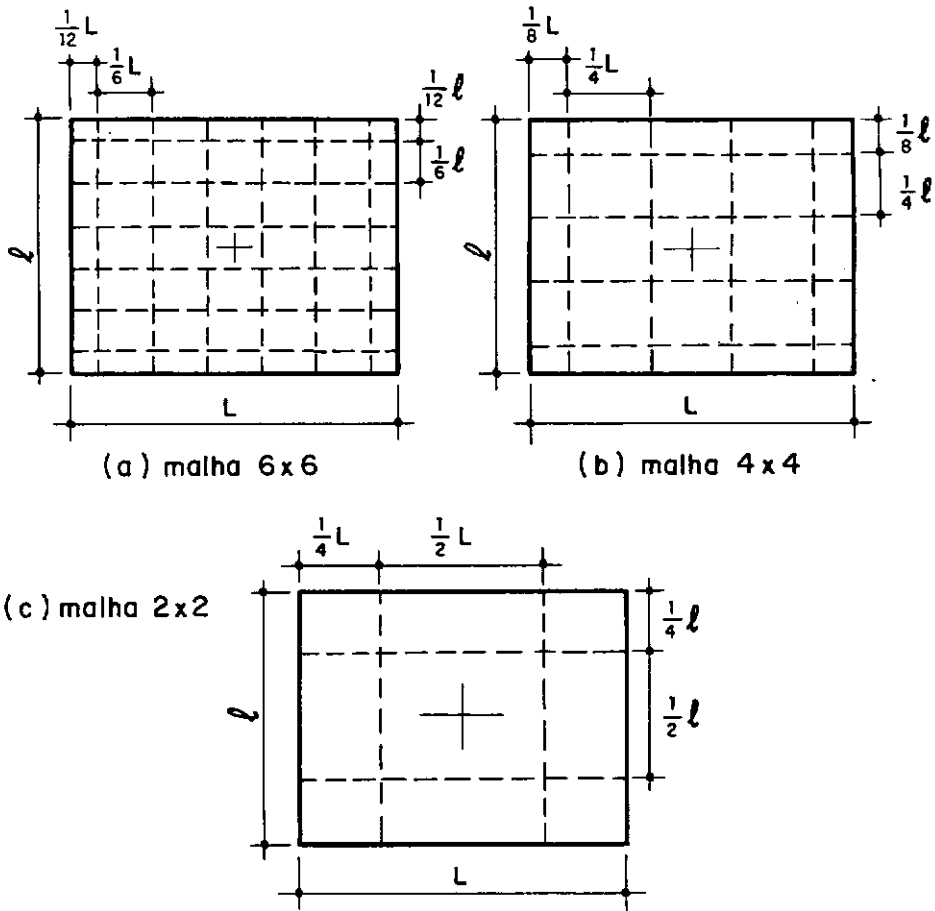


Fig. II.1 - Malhas utilizadas pelo autor.

Uma forma de se obter a largura equivalente do elemento de viga, l_e , é multiplicar os valores de $K/12$, contidos na última linha da tabela II.1, pela largura l .

Os autores pensaram em utilizar uma malha com um número maior de vigas, porém o computador disponível não suportava o número de equações simultâneas resultantes. Então, uma outra opção para que se pudesse verificar os resultados, foi a obtenção de valores como os apresentados

na tabela II.1 por meio de malhas com um menor número de vigas, ou seja, malhas mais grosseiras de 4x4 e 2x2 como nas figuras II.1b e II.1c e a extrapolação de alguns resultados.

A variável utilizada na extrapolação foi a razão l/L , entre a largura e o comprimento da laje, e sua influência na largura equivalente da laje. A razão, d/L , entre a dimensão da coluna e o comprimento é também muito importante. Poder-se-ia utilizar extrapolação para esta variável. Porém foi utilizado um modelo reduzido.

Um esboço do modelo é apresentado na figura II.2, composto por uma placa retangular simplesmente apoiada nos bordos paralelos à direção do vetor do momento aplicado (pontos de inflexão) e livre nos outros bordos, perpendiculares a esta mesma direção.

Com a aplicação de cargas conhecidas P_1 e P_2 , um momento, conseqüentemente conhecido, foi aplicado no centro da placa. A coluna foi simulada por meio de arruelas. Três tamanhos de arruelas, que proporcionaram diversos valores para d/L , foram utilizados em diferentes testes para enrijecer a placa nos pontos de aplicação do momento e para gerar um diagrama para uso em cálculos.

Os valores distintos para a razão l/L foram encontrados mediante a modificação da distância L entre os apoios simples, e a rotação no centro da placa foi obtida através de medições feitas na barra que serviu de suporte das cargas P_1 e P_2 .

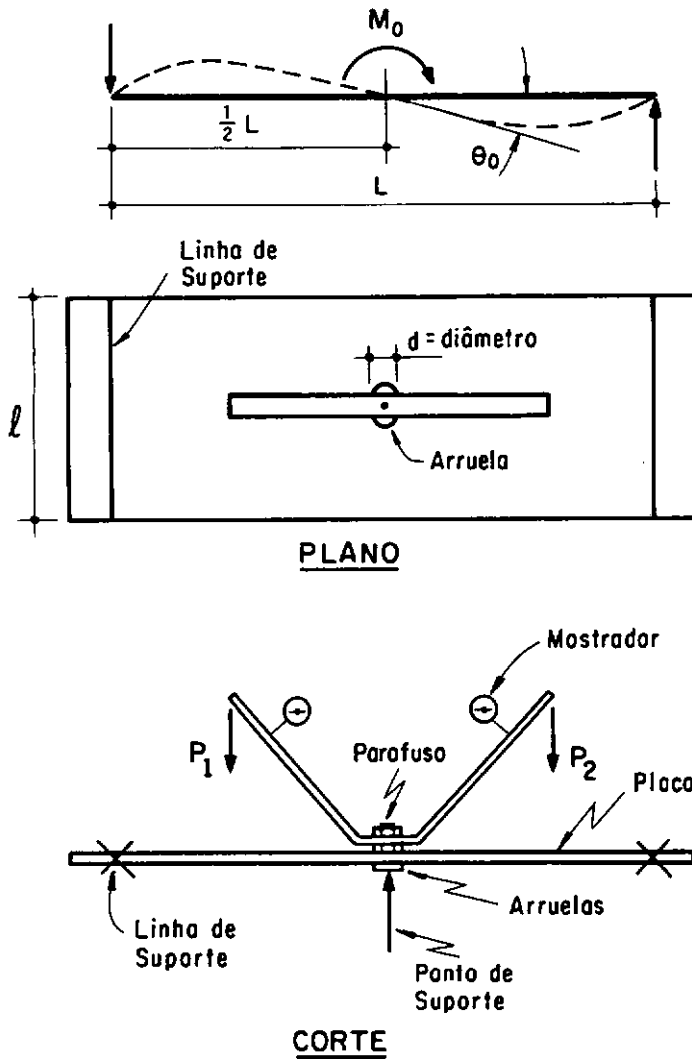


Fig. II.2 - Esboço do Modelo.

II.1.3 - Resultados e Conclusões

O gráfico, já mencionado, para uso em cálculos, é apresentado na figura II.3. Na figura original (KHAN e SBAROUNIS [3]), os círculos abertos e pontos representam valores médios para duas observações distintas com

diferentes graus de aperto do parafuso no centro da placa. Essas observações foram realizadas com o intuito de se verificar o efeito da rigidez na conexão da coluna com a placa. Apenas em alguns pontos há divergências consideráveis entre as linhas retas (figura II.3) e os pontos marcados (KHAN e SBAROUNIS [3]), o que faz parecer que este efeito é desprezível. Para que se possa comparar os valores do modelo com os valores calculados, as linhas são estendidas até interceptarem o eixo vertical, $d/L = 0$. Esta comparação está na tabela II.2.

$1/L$	Valores Extrapolados (e)	Valores do Modelo (m)	Razão (m/e)
0,50	0,60	0,51	0,85
0,75	0,47	0,41	0,87
1,00	0,38	0,32	0,84
1,25	0,31	0,27	0,87
1,33	0,30	0,25	0,83
1,50	0,27	0,23	0,85

Tabela II.2 - Valores de $1/L$

A diferença entre os valores encontrados experimentalmente e numericamente ficou em torno de 15%. Entre outros, o motivo pode ser encontrado nas diferentes condições de contorno ao longo dos bordos livres, uma vez que as verdadeiras condições de contorno nesses bordos não foram representadas, pois o momento variável distribuído que impedisse a rotação desses bordos em torno do eixo dos x não pode ser aplicado; na diferença entre os módulos de Poisson; no método de teste ou na extrapolação dos valores calculados das malhas.

Segundo os pesquisadores [3], independentemente da causa, os valores obtidos através da figura II.3 são adequados para fins de cálculo. Ainda, vários ensaios foram feitos com o momento aplicado próximo ao bordo da placa, simulando uma coluna exterior. Contudo, a diferença encontrada pelos autores foi pequena de forma que os valores apresentados na figura II.3 parecem ser aplicáveis a bordos exteriores.

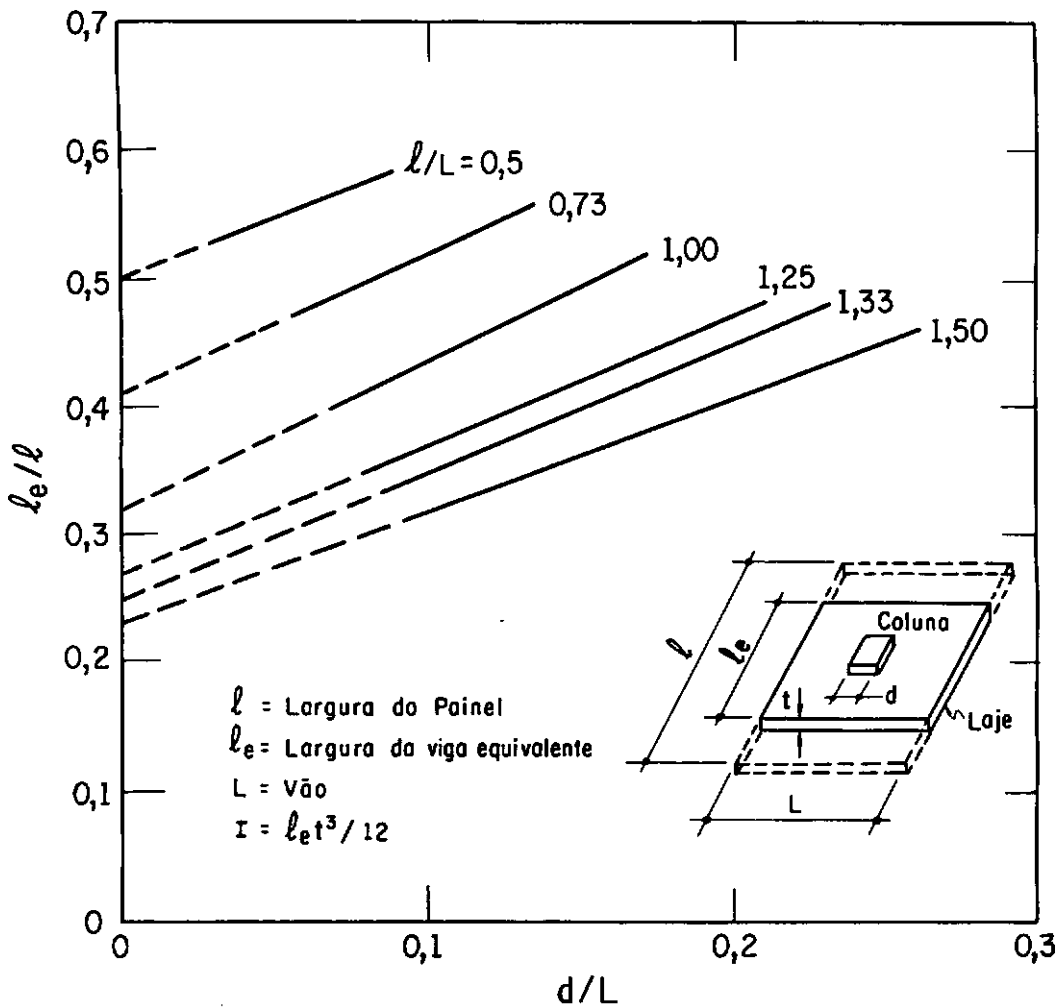


Fig. II.3 - Larguras de viga equivalente.

II.2 - O Método Proposto por Fraser

II.2.1 - Considerações Gerais

Fraser [4] utilizou o método dos elementos finitos para encontrar valores para as larguras efetivas de pavimentos de lajes sujeitos a carregamento lateral.

A análise de edificações em concreto de pavimentos múltiplos feita através do "método do pórtico equivalente" (figura II.4) é um procedimento muito utilizado pelos engenheiros estruturais e as normas [1,2] apresentam critérios para este método. A determinação da rigidez da viga equivalente é um ponto muito importante contido nestes critérios. Para o caso particular de lajes sem vigamentos tem-se :

$$I_e = b_e \frac{h^3}{12} \quad (II.3)$$

Onde " I_e " é momento de inércia da viga equivalente; " b_e " é a largura efetiva de laje e " h " é a sua espessura.

A rigidez da viga equivalente é, então :

$$K_e = k \frac{E I_e}{l_1} \quad (II.4)$$

Onde " k " é o coeficiente de rigidez; " E " é o módulo de elasticidade longitudinal e " l_1 ", o vão da laje na direção perpendicular à direção do vetor do momento

aplicado. O valor de "k" para vigas não prismáticas pode ser determinado através de tabelas apresentadas por SIMMONDS e MISIC [10]. Para vigas prismáticas tem-se $k=4$.

Uma vez que o autor [4] concorda que não há razões para que se tenha um valor constante para a largura efetiva de laje, ou seja, independente das dimensões da coluna e da razão entre os vãos l_2/l_1 , sua pesquisa tem por objetivo principal desenvolver regras que tenham uma precisão razoável e sejam mais simples para o método do pórtico equivalente do que as apresentadas no código do ACI [11]. Assim foram deduzidas, para pavimentos sem vigamentos, fórmulas que proporcionam de modo fácil uma estimativa para a obtenção da largura efetiva.

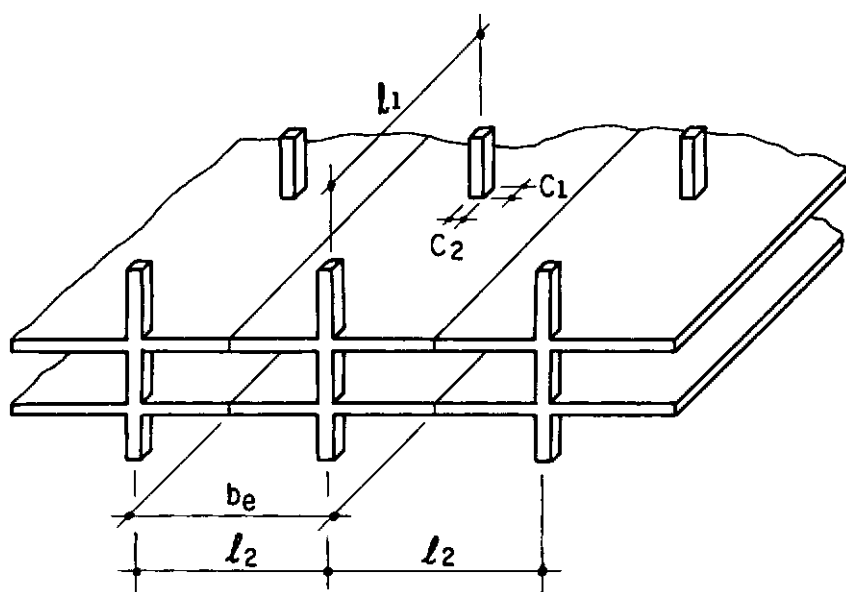


Fig. II.4 - O método do pórtico equivalente.

II.2.2 - Análise por Meio de Elementos Finitos

Foram utilizados elementos finitos de viga ao longo das linhas que ligam as colunas, os quais tinham altura igual à espessura da laje. No resto do pavimento foram utilizados elementos de placa. Sendo os elementos ao longo das colunas poucos e pequenos em relação ao resto do painel de lajes, as diferenças existentes entre o comportamento estrutural dos elementos de placa e viga deveriam, segundo o autor [4], ter pouco efeito na resposta da laje aos carregamentos e deformações aplicadas. Então a discretização usada foi considerada uma simulação satisfatória para a análise do comportamento elástico de pavimento de lajes sem vigamento. O autor [4] fez comparações com um modelo experimental e concluiu que as diferenças estavam sempre num limite de 10%.

Através do programa de elementos finitos disponível foi possível, variando-se parâmetros importantes (tabela II.3), gerar um intervalo grande de configurações de lajes sem vigamento.

l_2/l_1	0,67	0,875	1,0	1,25	1,5
Dimensão da coluna	24		36		48
c_2/c_1	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
l_2/h ou l_1/h	25		35		45

Vão Nominal, $l_1 = 384$ unidades

tabela II.3 - Parâmetros e Valores para análise de pavimento sem vigamento

O procedimento para se determinar a largura efetiva é demonstrado a seguir e a figura II.5 mostra um painel quadrado com colunas também quadradas e uma série típica de ações devidas a uma rotação aplicada de 0,1 radianos no apoio interior.

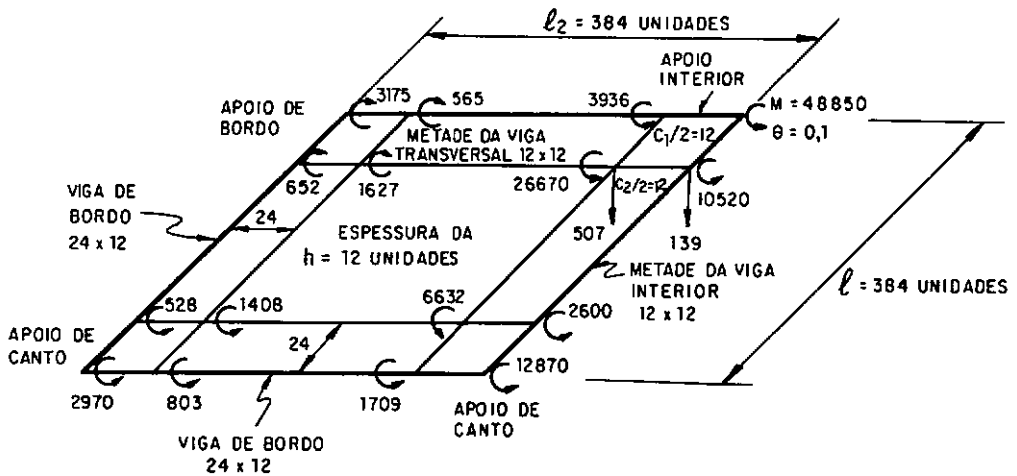


Fig.II.5 - Principais resultados atuantes em uma laje quadrada sem vigamento.

A rigidez à flexão da viga formada pela metade da coluna é :

$$K_b = \frac{E I}{l} = \frac{2500 \cdot 12 \cdot 12^3 / 12}{384} = 11250 \text{ unidades}$$

Da figura II.5 tem-se que o momento na laje e na metade da viga interior é :

$$M_f = 26670 + 10520 = 37170 \text{ unidades}$$

O fator de rigidez da viga equivalente no plano k_{\bullet} , vale :

$$k_{\bullet} = \frac{M_f}{K_b \theta} = \frac{37170}{11250 \cdot 0,1} = 33$$

A rigidez da viga equivalente interior :

$$K_{\bullet} = \frac{k_{\bullet} EI}{l_1} = \frac{33 E c_2 h^3 / 12}{l_1} \quad (\text{II.5})$$

Se a viga equivalente é prismática, tem-se $k_{\bullet} = 4$

$$K_{\bullet} = \frac{4E}{l_1} I_{\bullet} = \frac{4E}{l_1} \cdot \frac{b_{\bullet} h^3}{12} \quad (\text{II.6})$$

Então, igualando as equações (II.5) e (II.6) tem-se :

$$b_{\bullet} = \frac{K_{\bullet}}{4} c_2 = \frac{33}{4} c_2 = 8,25 c_2$$

$$\frac{b_{\bullet}}{l_2} = 0,516$$

Donde se observou que a largura efetiva da viga interior para a laje sem vigamento do exemplo mostrado na figura II.5 é aproximadamente metade da largura inteira de painel. Procedimento análogo foi executado com a rotação

sendo aplicada ao apoio de canto do mesmo painel e encontrou-se uma largura efetiva 66% menor que a largura inteira de painel, ou seja, $b_e = 0,34 l_2$.

II.2.3 - Resultados e Conclusões

Diversos valores para k_e foram obtidos a partir da variação paramétrica apresentada na tabela II.3 e marcados em um diagrama com o parâmetro de flexão R_b . Neste diagrama observou-se uma tendência para uma reta, tanto para vigas interiores como para exteriores. Foram obtidas, assim, as seguintes equações aproximadas :

$$k_e = 8 + \frac{4}{3} R_b \pm 15\%$$

para vigas equivalentes interiores. E

$$k_e = 8 + \frac{1}{2} R_b \pm 15\%$$

para vigas equivalentes exteriores.

Onde,

$$R_b = \frac{\text{RIGIDEZ DA LAJE}}{\text{RIGIDEZ DA VIGA}}$$

$$R_b = \frac{Eh^3/12(1-\nu^2)}{Ec_2h^3/12l_1} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{l_1}{c_2} \quad (\text{II.7})$$

Considerando para o concreto $\nu = 0,15$:

$$R_b \cong \frac{l_1}{c_2} \quad (\text{II.8})$$

Como já foi mostrado :

$$b_o = (k_o/4) c_2 \quad (\text{II.9})$$

Para vigas interiores :

$$\frac{b_o}{l_2} = 2 \frac{c_2}{l_2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{II.10})$$

E para vigas exteriores :

$$\frac{b_o}{l_2} = 2 \frac{c_2}{l_2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{II.11})$$

VANDERBILT [11] apresentou os resultados das deflexões para carregamentos laterais de um modelo de prédio com pavimentos sem vigamento. A figura II.6 mostra os detalhes do modelo. As larguras efetivas do autor [4] encontram-se na tabela II.4.

Por meio de um programa convencional para a análise de pórtico, o pórtico equivalente foi calculado para três casos de carregamento lateral, 100 lb nos níveis 3,5 e 7. A figura II.7 apresenta gráficos das deflexões medidas e calculadas e a aproximação é, segundo o autor [4], satisfatória para fins de cálculo. O calculista deve ter sempre em mente que os resultados aqui e nas referências até agora citadas, são baseados no

comportamento elástico linear.

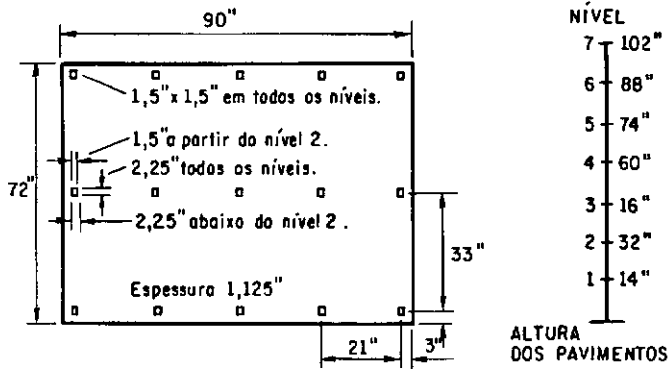


Fig. II.6 - Detalhes do modelo.

Larguras Efetivas					Σb_e
Níveis	Pórticos Interiores		Pórticos Exteriores		
	Colunas Int.	Colunas Ext.	Colunas Int.	Colunas Ext.	
1 e 2	15,5	14,0	10,5	9,375	64
	14,75 . 3 = 44,25		9,937 . 2 = 19,875		
3 a 7	14,0	14,0	9,375	9,375	60,8
	14,0 . 3 = 42,00		9,375 . 2 = 18,75		

Todas as Dimensões em polegadas $E = 3,52 \cdot 10^6 \text{ lb/pol}^2$

Tabela II.4

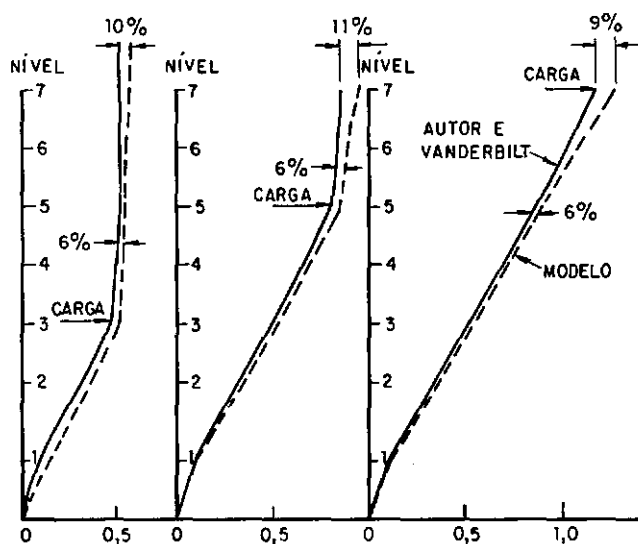


Fig. II.7 - Deflexões laterais em polegadas $\times 10^{-2}$.

CAPÍTULO III

OS MÉTODOS PROPOSTOS POR PECKNOLD (1975), ALLEN E DARVALL (1977) E WONG E COULL (1980) PARA OBTENÇÃO DE LARGURAS EFETIVAS DE LAJES

III.1 - O Método Proposto por Pecknold

III.1.1 - Considerações Gerais

Em termos práticos, o emprego do pórtico equivalente na avaliação de sistemas estruturais de lajes sem vigamento sujeitos a carregamento lateral é conveniente, contudo requer valores de larguras efetivas de lajes para um número representativo de lajes e colunas com dimensões variadas. PECKNOLD [5] apresenta uma fórmula simples para a determinação desses valores para um painel típico interior e alguns resultados são apresentados através de diagrama, os quais podem ser usados pelos calculistas.

Um elemento típico desse painel é mostrado na figura III.1. Como KHAN e SBAROUNIS [3], o autor [5] supõe que ele é limitado por linhas de simetria em relação a um plano vertical - onde a rotação em torno do eixo dos x é nula - perpendiculares à direção do vetor do momento aplicado; e por linhas de anti-simetria em relação a um plano horizontal, paralelas àquela mesma direção, caracterizadas por pontos de inflexão e, portanto, chamadas linhas de inflexão.

A técnica utilizada pelo autor [5] para a obtenção da largura efetiva faz uso da teoria elástica de placa e do modelo de Levy como solução [8]. Além da restrição à rotação nos bordos onde ocorre simetria, outro efeito que deve ser observado é a dimensão finita da área de contato ou conexão. Esta é de grande importância pois dela depende muito a largura efetiva. Para colunas com grandes seções transversais pode-se ter, por exemplo, valores maiores do que o esperado.

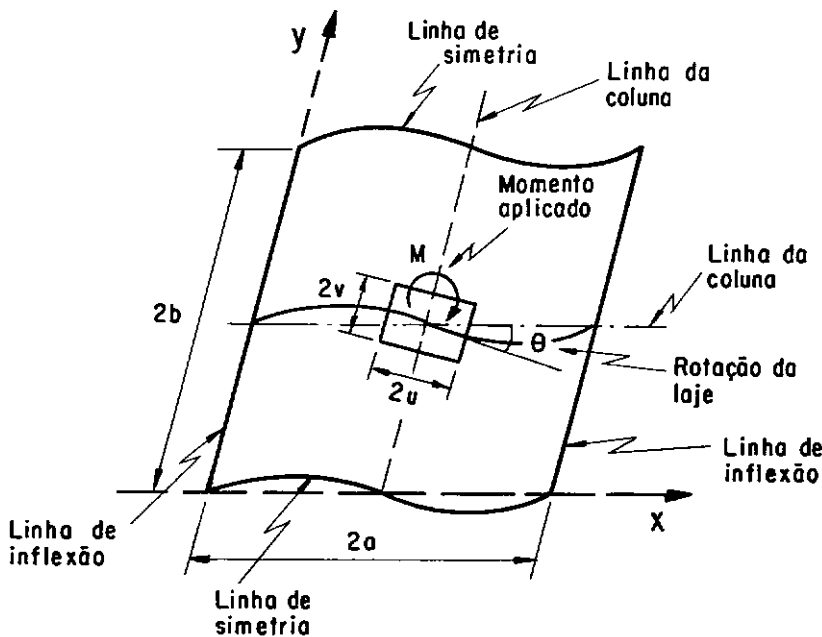


Fig. III.1 - Elemento típico de painel.

III.1.2 - Metodologia

Uma carga distribuída na região de contato é gerada pelo momento aplicado a laje pela coluna. Esta carga depende da rigidez axial da coluna relativa a

rigidez à flexão da laje. Na maioria dos casos a área de conexão é considerada rígida uma vez que esta rigidez relativa é muito alta.

A carga distribuída na laje foi expandida em série de Fourier :

$$q(x,y) = \frac{M}{2a^2v} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}, \quad -v \leq y \leq v$$

(III.1)

$$= 0, \quad v < |y| \leq b$$

Onde o termo $\frac{M}{2a^2v}$ aparece por conveniência e o coeficiente Q_m depende da distribuição de carga. A carga distribuída na área de contato é suposta constante na direção paralela ao vetor do momento.

Igualando-se as rotações da laje no centro da área de contato com a de uma viga, com altura igual a espessura da laje, onde atua o mesmo momento concentrado M , a largura efetiva de laje é dada por :

$$\frac{b'}{b} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{v}{a} \cdot \frac{a}{b} \left/ \left[f_b + 6 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m \cdot \pi} \right)^3 Q_m A_m \right] \right.$$

(III.2)

e

$$A_m = \frac{\alpha_m \sinh \bar{\alpha}_m - \sinh \alpha_m (2 \sinh(\alpha_m - \bar{\alpha}_m) + \bar{\alpha}_m \cosh(\alpha_m - \bar{\alpha}_m))}{2 \sinh^2 \alpha_m}$$

(III.3)

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{a} \quad ; \quad \bar{\alpha}_m = \frac{m\pi v}{a}$$

O termo f_b é o decréscimo na flexibilidade de uma viga devido à dimensão finita da área de contato; A_m depende de v/a , b/a e das condições de contorno nos bordos, mas não depende da carga distribuída; e o coeficiente Q_m depende da distribuição de carga, como já citado, e também da razão u/a .

Para simular a distribuição de carga produzida por uma coluna rígida, a figura III.2 mostra um sistema de cargas e momentos concentrados, como também as expressões para Q_m e f_b correspondentes. Uma carga triangular distribuída é apresentada simulando uma coluna flexível.

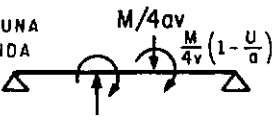
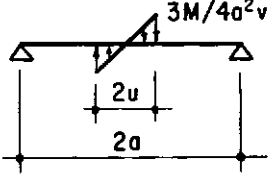
DISTRIBUIÇÃO DA CARGA NA ÁREA DE CONTATO	COEFICIENTE DE FOURIER Q_m	REDUÇÃO DA FLEXIBILIDADE f_b
<p>COLUNA RÍGIDA</p>  <p>$M/4v$ $M/4v(1-\frac{u}{a})$</p> <p>$M/4uv$</p>	$\text{sen } \frac{m\pi u}{a} + \left(1 - \frac{u}{a}\right) m\pi \cos \frac{m\pi u}{a}$	$\left(1 - \frac{u}{a}\right)^3$
<p>COLUNA FLEXÍVEL</p>  <p>$3M/4a^2v$</p> <p>$2u$ $2a$</p>	$\frac{\text{sen } \frac{m\pi u}{a}}{\frac{u}{a}}$ $3 \left(\frac{\text{sen } \frac{m\pi u}{a}}{\frac{m\pi u}{a}} - \cos \frac{m\pi u}{a} \right) \frac{1}{\left(\frac{m\pi u}{a}\right) \left(\frac{u}{a}\right)}$	$\left(1 - \frac{u}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{a}\right)$ $1 - \frac{9u}{8a} + \frac{3}{10} \left(\frac{u}{a}\right)^2$

Fig. III.2 - Distribuição de carga na área de contato e termos Q_m e f_b .

III.1.3 - Resultados e Conclusões

Na figura III.3 estão valores de larguras efetivas, para laje quadrada com coluna também quadrada, para as três considerações de distribuição de carga da figura III.2. O autor [5] também apresenta resultados obtidos por diferenças finitas propostos por AALAMI [12].

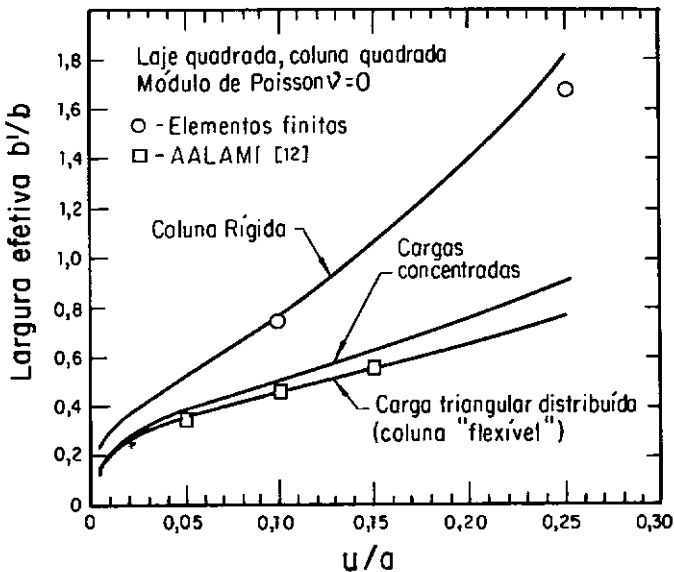


Fig. III.3 - Larguras efetivas para as distribuições de carga consideradas.

Pode-se notar pela figura III.3 o efeito de rigidez devido à dimensão finita da área de contato, quando a dimensão da coluna aumenta e assim, conseqüentemente, a importância da rigidez relativa da coluna.

Com o intuito de comparar os valores das larguras efetivas obtidas para lajes com coluna rígida,

utilizando as distribuições de carga da figura III.2, utilizou-se elemento finito de placa com 16 graus de liberdade, em um quadrante com uma malha 4x4, com duas dimensões de coluna : $u/a = 0,10$ e $0,25$. Os resultados são mostrados também na figura III.3.

A convergência da série definida em (III.2) se processa rapidamente o que permite o cálculo de larguras efetivas para um intervalo grande de configurações de lajes, por meio de variação de parâmetros, com um custo computacional muito menor do que procedendo-se a análise por meio de elementos finitos.

Valores para larguras efetivas de lajes com coluna rígida, como função da dimensão relativa da coluna para várias dimensões de lajes, estão marcados na figura III.4, onde foram utilizadas colunas quadradas.

Resultados para colunas retangulares também foram calculados pelo autor (PECKNOLD [5]). Porém não foram apresentados, pois, segundo o mesmo [5], variando-se a largura da coluna de $1/2$ a 2 vezes a outra dimensão, a largura efetiva varia menos de 2%.

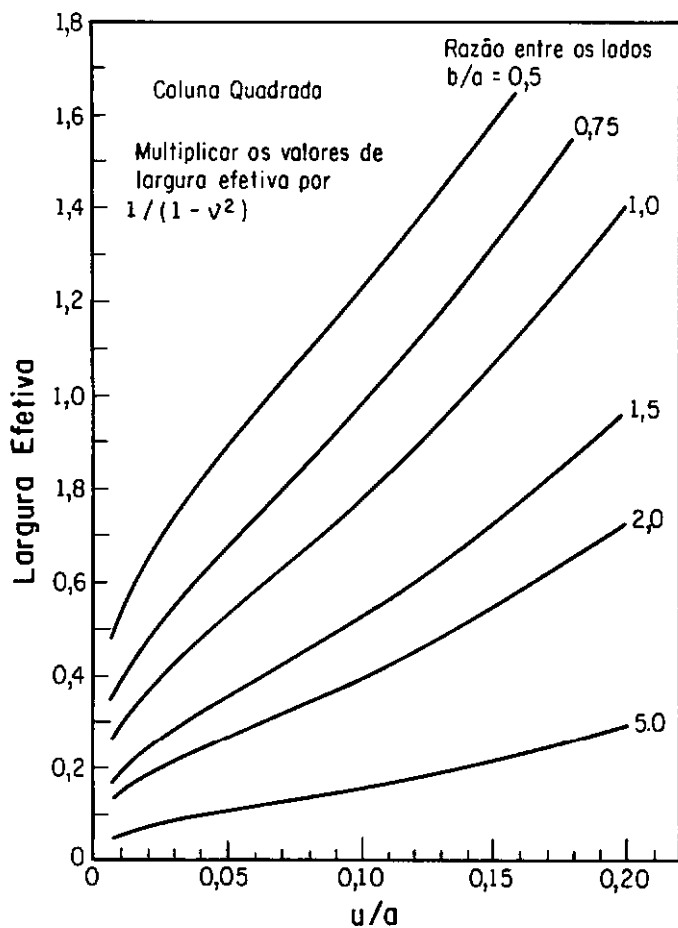


Fig. III.4 - Largura efetiva de laje - coluna rígida.

III.2 - O Método Proposto por Allen e Darvall

III.2.1 - Considerações Gerais e Metodologia

O trabalho desenvolvido por ALLEN e DARVALL [6] tem uma análise semelhante a utilizada por PECKNOLD [5]. Foi utilizada a mesma solução de Levy (TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KREIGER [8]), e obtidos resultados idênticos aos apresentados por PECKNOLD [5], apesar de expressados de uma forma diferente.

Os autores [6] definem o coeficiente de largura efetiva (λ) como sendo a razão entre a largura da viga equivalente (l'_2) e a largura inteira de painel (l_2). Assim, ao igualar a rotação do centro da laje da figura I.14c com a de uma viga sujeita ao mesmo tipo de momento atuante na laje, foi obtida a seguinte expressão para o coeficiente de largura efetiva :

$$\lambda = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\nu}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot f_b / \left[f_b + 6 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m \cdot \pi} \right)^3 Q_m A_m \right] \quad (\text{III.4})$$

Esta expressão (III.4) foi obtida da mesma forma que a de PECKNOLD [5] e, portanto, todos os termos apresentados são os mesmos que constam na expressão (III.2). A diferença existente entre as expressões (III.4) e (III.2) é que PECKNOLD [5], na expressão (III.2), considera que a viga equivalente está conectada diretamente ao eixo da coluna sem os efeitos de braço rígido, ou seja, a área da conexão da laje com a coluna é

considerada nula. Na expressão (III.4) foi levada em conta a dimensão finita da área de contato da laje com a coluna. Então, os valores encontrados através da expressão (III.4) são os mesmos da expressão (III.2) multiplicados pelo fator redutor da flexibilidade (f_b).

III.2.2 - Resultados e Conclusões

As tabelas III.1 a III.4 apresentam valores para os coeficientes λ , para o caso de coluna rígida, para diversos valores da razão entre os lados (l_1/l_2). Os valores de l_1/l_2 variam entre 0,5 e 2,0 e as dimensões relativas das colunas também cobrem um grande intervalo.

Dos valores apresentados os autores [6] concluíram que a largura efetiva depende principalmente da razão entre a dimensão longitudinal da coluna (c_1) e o vão da laje (l_1). Nota-se, também, que ela depende, com um pouco menos de importância, da razão entre a dimensão transversal da coluna (c_2) e o mesmo vão (l_1).

Foi feita, ainda, uma comparação dos valores obtidos através da análise descrita com os encontrados através de um trabalho experimental. Nesse trabalho foram utilizadas placas de aço com diversas razões entre os lados e vãos de 1 m e uma placa retangular de microconcreto, com traço 1/5, para colunas quadradas rígidas. A conclusão encontrada pelos autores [6] foi que apesar das dificuldades em simular as condições de bordos, os resultados tiveram uma boa aproximação.

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1									
	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
0,03	0,190	0,189	0,190	0,192	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	0,208
0,04	0,227	0,217	0,213	0,212	0,211	0,212	0,213	0,215	0,217	0,220
0,05	0,264	0,245	0,236	0,231	0,229	0,228	0,228	0,229	0,230	0,231
0,06	0,298	0,270	0,257	0,249	0,245	0,243	0,242	0,242	0,242	0,243
0,07	0,322	0,290	0,275	0,266	0,261	0,257	0,255	0,255	0,254	0,255
0,08	0,334	0,304	0,289	0,280	0,275	0,271	0,268	0,267	0,266	0,266
0,09	0,334	0,312	0,300	0,292	0,287	0,283	0,280	0,279	0,277	0,277
0,10	0,327	0,315	0,307	0,301	0,297	0,294	0,291	0,290	0,288	0,288
0,11	0,317	0,314	0,312	0,309	0,306	0,304	0,302	0,300	0,299	0,298
0,12	0,307	0,313	0,315	0,315	0,314	0,313	0,311	0,310	0,309	0,308

Tabela III.1 - Coeficientes de largura efetiva para uma placa

de vão l_1 e largura l_2 ($l_1/l_2 = 0,50$).

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1									
	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
0,03	0,375	0,375	0,376	0,380	0,384	0,389	0,394	0,399	0,405	0,411
0,04	0,447	0,429	0,421	0,418	0,418	0,419	0,422	0,425	0,429	0,434
0,05	0,521	0,483	0,465	0,455	0,451	0,449	0,449	0,451	0,453	0,456
0,06	0,585	0,531	0,505	0,491	0,483	0,479	0,477	0,476	0,477	0,479
0,07	0,631	0,570	0,540	0,523	0,513	0,506	0,503	0,501	0,500	0,501
0,08	0,653	0,597	0,568	0,550	0,539	0,532	0,527	0,525	0,523	0,523
0,09	0,654	0,611	0,588	0,573	0,563	0,555	0,550	0,547	0,545	0,544
0,10	0,640	0,616	0,601	0,590	0,582	0,576	0,572	0,568	0,565	0,564
0,11	0,620	0,615	0,610	0,605	0,599	0,595	0,591	0,588	0,585	0,582
0,12	0,601	0,612	0,616	0,616	0,614	0,612	0,609	0,606	0,604	0,602

Tabela III.2 - Coeficientes de largura efetiva para uma placa

de vão l_1 e largura l_2 ($l_1/l_2 = 1,00$).

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1									
	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
0,03	0,485	0,485	0,487	0,491	0,496	0,502	0,509	0,516	0,523	0,530
0,04	0,575	0,552	0,542	0,538	0,538	0,540	0,543	0,547	0,552	0,558
0,05	0,664	0,618	0,596	0,584	0,579	0,577	0,577	0,578	0,581	0,585
0,06	0,742	0,677	0,645	0,628	0,618	0,612	0,610	0,609	0,610	0,612
0,07	0,796	0,723	0,687	0,666	0,653	0,646	0,641	0,639	0,638	0,638
0,08	0,822	0,754	0,719	0,698	0,685	0,676	0,670	0,667	0,655	0,664
0,09	0,821	0,770	0,742	0,724	0,712	0,703	0,697	0,693	0,690	0,689
0,10	0,803	0,775	0,757	0,744	0,735	0,727	0,722	0,717	0,714	0,712
0,11	0,779	0,773	0,767	0,760	0,754	0,749	0,744	0,740	0,737	0,734
0,12	0,755	0,769	0,773	0,733	0,771	0,768	0,764	0,761	0,758	0,756

Tabela III.3 - Coeficientes de largura efetiva para uma placa

de vão l_1 e largura l_2 ($l_1/l_2 = 1,33$).

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1									
	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
0,03	0,654	0,654	0,656	0,661	0,668	0,675	0,682	0,690	0,699	0,707
0,04	0,758	0,732	0,720	0,716	0,715	0,717	0,721	0,726	0,731	0,737
0,05	0,858	0,805	0,780	0,767	0,760	0,758	0,758	0,760	0,763	0,766
0,06	0,939	0,868	0,833	0,813	0,802	0,796	0,793	0,792	0,793	0,795
0,07	0,992	0,914	0,875	0,853	0,839	0,830	0,825	0,822	0,821	0,821
0,08	1,013	0,944	0,907	0,884	0,870	0,860	0,854	0,850	0,847	0,846
0,09	1,008	0,957	0,927	0,908	0,895	0,886	0,879	0,875	0,871	0,869
0,10	0,986	0,958	0,939	0,926	0,916	0,908	0,902	0,897	0,893	0,891
0,11	0,957	0,952	0,945	0,938	0,932	0,926	0,921	0,917	0,913	0,911
0,12	0,930	0,944	0,948	0,948	0,945	0,942	0,938	0,935	0,931	0,928

Tabela III.4 - Coeficientes de largura efetiva para uma placa

de vão l_1 e largura l_2 ($l_1/l_2 = 2,00$).

III.3 - O Método Proposto por Wong e Coull

III.3.1 - Introdução e Considerações Gerais

Para a determinação da largura efetiva e da rigidez da conexão de um pavimento de lajes em uma estrutura de lajes sem vigamento, carregada lateralmente, os autores [7] apresentam o "método do coeficiente de influência". Ao deformar-se, esse tipo de estrutura, apresenta pontos de inflexão nas colunas e nas vigas equivalentes (figura I.13)

A viga equivalente é uma viga que tem por altura a espessura da laje e largura igual a uma largura efetiva de laje que aja como uma viga no pórtico equivalente. Uma forma de se quantificar esta largura efetiva, pode ser igualar a rigidez à rotação da laje a de uma viga equivalente conectada à mesma coluna em um elemento típico de laje limitado pelas supostas linhas de inflexão (figura III.5).

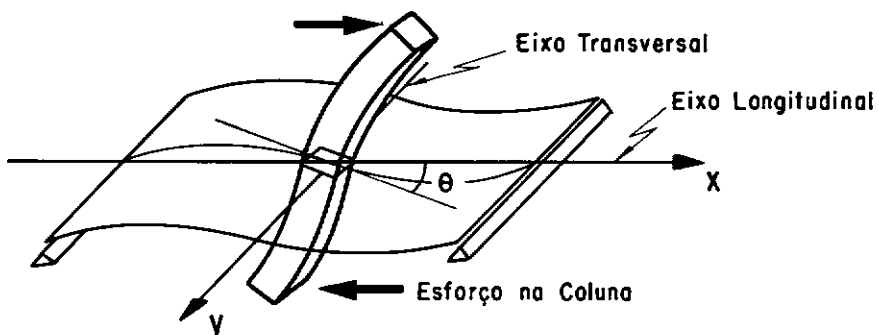


Fig. III.5 - Elemento típico de laje deformado pela ação de carga lateral de vento.

As dimensões da coluna e as condições de contorno da laje são parâmetros de grande influência na determinação da rigidez à rotação da laje. Geralmente a coluna possui uma rigidez axial alta em relação a rigidez à flexão da laje, podendo-se assim considerar a coluna como axialmente rígida.

As mesmas suposições para as condições de contorno utilizadas pela maioria dos pesquisadores estudados [3,5,6] para o elemento típico foram também supostas pelos autores [7] no trabalho a ser exposto. E a seguinte nomenclatura para as dimensões do elemento típico de painel foi considerada (figura III.6).

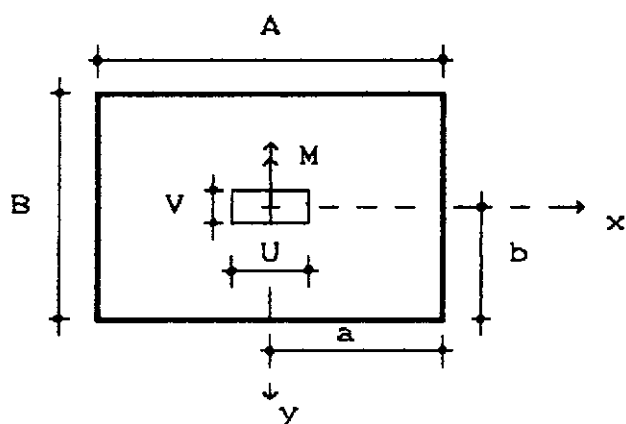


Figura III.6 - Elemento típico de painel

III.3.2 - Metodologia

No centro da coluna atua um momento como indicado na figura III.6. Esse momento é transmitido à laje através de forças distribuídas na periferia da

coluna. A ação efetiva deste sistema de forças pode ser aproximada por uma série equivalente de forças, contendo forças e momentos concentrados aplicados em determinados pontos, ou nós, na periferia da coluna (figura III.7).

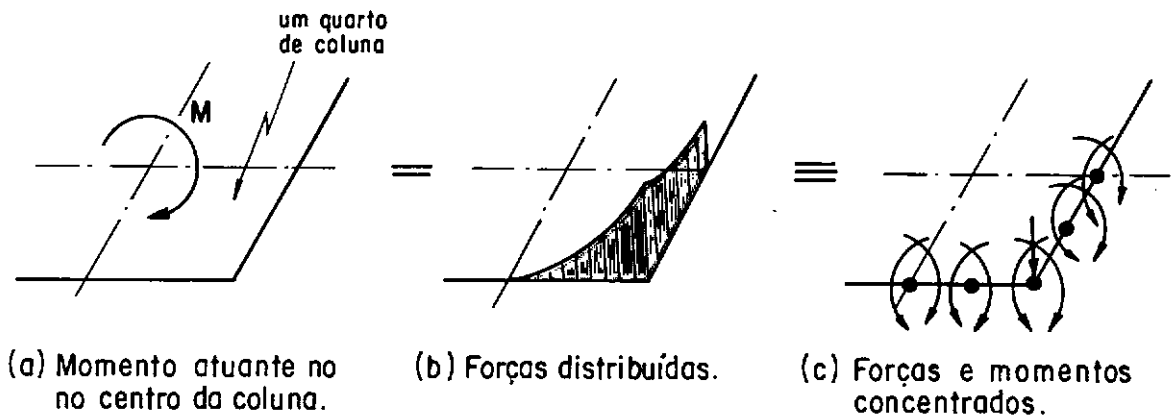


Fig. III.7 - Simulação da distribuição de cargas transmitidas pelo momento à periferia da coluna.

O vetor deslocamento $\{\delta\}_i$ é composto por um deslocamento vertical e duas rotações θ_{xi} e θ_{yi} , pois o vetor de forças $\{R\}_i$ em um nó i é composto, geralmente, por uma carga concentrada P_i e pelos momentos M_{xi} e M_{yi} . A componente do deslocamento s_i no nó i devido a uma força unitária r_j no nó j é definida pelo coeficiente de influência $(f_{rs})_{ij}$, e este permite que o deslocamento em qualquer nó i da malha devido ao sistema de forças seja encontrado por superposição da seguinte maneira :

$$\langle \delta \rangle_i = [F_{i1} \ F_{i2} \ \dots \ F_{in}] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Onde $[F_{ij}]$ é uma submatriz de flexibilidade 3×3 , que contém os coeficientes de influência $(f_{rs})_{ij}$, que podem ser obtidos por meio da teoria clássica de placas [11], pelo método de Levy.

Através de uma rotação unitária da seção transversal da coluna rígida, deslocamentos conhecidos podem ser impostos sobre o painel da laje e, a partir daí, a rigidez à rotação e a largura efetiva correspondente podem ser determinadas. A compatibilidade existente entre os deslocamentos devidos ao sistema de forças desconhecidas e os deslocamentos lineares na periferia da coluna impostos pela rotação da coluna leva ao seguinte sistema de equações :

$$[F] \langle R \rangle = \langle \delta \rangle \quad (\text{III.6})$$

Ou reordenando para encontrar-se as forças desconhecidas :

$$\langle R \rangle = [F]^{-1} \langle \delta \rangle \quad (\text{III.7})$$

O momento resultante sobre o eixo da coluna, devido as forças calculadas nos nós da mesma é igual em quantidade a rigidez à rotação da laje para uma rotação

unitária da coluna. Assim, tem-se

$$M = \sum_{i=1}^n (P_i x_i + M_{xi}) \quad (\text{III.8})$$

Onde x_i é a distância do nó i ao eixo da coluna na direção x e n é o número total de nós considerados.

Um fator adimensional de rigidez K pode ser definido para expressar a rigidez à rotação da laje :

$$K = M/D \quad (\text{III.9})$$

Onde D é a rigidez à flexão da laje :

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{III.10})$$

E é o módulo de elasticidade longitudinal, t é a espessura da laje e ν é o módulo de Poisson. Ao igualar a rigidez à rotação da laje com a de uma viga equivalente de altura igual a espessura da laje e largura efetiva B_e , tem-se :

$$\frac{B_e}{B} = \frac{K}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{A}{B} \left(1 - \frac{U}{A} \right)^3 \quad (\text{III.11})$$

Onde A , B e U são as dimensões apresentadas na figura III.6. Nesta equação (III.11) considera-se o trecho infinitamente rígido da viga na área da conexão da viga com a coluna.

Uma vez que se tenha os valores das forças

nodais calculados pode-se substituí-los nas funções de influência para os deslocamentos e deformações resultantes na placa. Os momentos M_x , M_y e M_{xy} são dados, com os deslocamentos já encontrados, pelas seguintes relações [8] :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

A equação diferencial (III.13) governa a flexão de uma placa elástica fina carregada transversalmente por um carregamento distribuído p (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KREIGER [8]). Através da técnica empregada por Levy [8], pode ser encontrada a solução exata para uma placa simplesmente apoiada em dois bordos opostos, sendo esta placa retangular. A equação (III.14) fornece a expressão da flecha para a placa suposta quando os dois lados apoiados são definidos em $x = 0$ e $x = a$.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (\text{III.13})$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{III.14})$$

Nessa última expressão as condições de contorno,

de flecha e momento nulos nos bordos simplesmente apoiados, são satisfeitas em cada termo da série infinita. As funções Y_m satisfazem a equação (III.13) e nelas quatro constantes desconhecidas são determinadas, de forma que as condições de contorno dos bordos longitudinais do painel sejam satisfeitas para garantir a continuidade do mesmo. Então, a solução pode ser encontrada pela equação (III.14) com uma determinada precisão, utilizando-se um número adequado de termos.

As funções de influência podem ser obtidas através da função de Green, $G(x, y, \xi, \eta)$, a qual fornece o deslocamento vertical no ponto (x, y) devido a uma carga unitária no ponto (ξ, η) . Na solução de Levy [8], uma carga concentrada P no ponto (ξ, η) é dada na seguinte forma :

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{III.15})$$

e

$$E_m = \frac{2P}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \quad (\text{III.16})$$

Como se pode notar esta carga é senoidal e atua ao longo da linha $y = \eta$. Assim a placa é dividida pela carga em dois segmentos sem haver nenhuma carga de superfície distribuída nos mesmos. Para os segmentos 1 e 2, pode-se escrever :

Para $y \leq \eta$:

$$w_1 = \sum \frac{E_m}{2D} \left(\frac{a}{m \cdot \pi} \right)^3 \left\{ A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ \left. + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{III.17})$$

Para $y \geq \eta$:

$$w_2 = \sum \frac{E_m}{2D} \left(\frac{a}{m \cdot \pi} \right)^3 \left\{ P_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + Q_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ \left. + R_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + S_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{III.18})$$

Todos os valores das constantes - de A_m a S_m - podem ser encontrados empregando-se as condições de contorno, quatro das quais conhecidas nos bordos longitudinais $y = 0$ e $y = b$. As outras quatro são determinadas a partir das condições de continuidade da flecha, declividade e curvatura normais através da linha da carga, e uma descontinuidade no esforço cortante igual ao carregamento aplicado, dado pela equação (III.15).

A técnica utilizada [8] consiste na substituição das constantes em coordenadas (ξ, η) do ponto da carga nas equações (III.17) e (III.18) que possibilita que a flecha seja escrita da seguinte forma :

$$w(P) = P \times G(x, y, \xi, \eta) \quad (\text{III.19})$$

Para o caso de momentos concentrados nos nós, os coeficientes de influência para a flecha podem ser obtidos

através da consideração de duas forças iguais e de sentidos opostos atuando com um pequeno braço-de-alavanca Δ , que as separa e tende para zero. Temos, por exemplo, que a expressão para a flecha devida ao momento M_x pode ser a seguinte :

$$w(M_x) = M_x \times (\partial/\partial \xi) [G(x,y,\xi,\eta)] \quad (III.20)$$

Para as rotações θ_x e θ_y em um ponto (x,y) , devidas a uma carga concentrada ou a um momento em outro ponto (ξ,η) , as funções de influência são encontradas a partir das derivadas da função de influência da flecha para a força considerada, em relação a x ou y .

III.3.3 - Resultados e Conclusões

A solução para o problema da ação recíproca da coluna e da laje tem a sua precisão dependente dos erros de convergência apresentados pelo truncamento da série harmônica infinita na determinação dos coeficientes de influência e da discretização da interação contínua entre a coluna e a laje. Segundo os autores [7], os erros devidos ao truncamento da série e da discretização compensam-se até um certo grau, pois enquanto o truncamento conduz a coeficientes de influência menores, portanto uma laje mais rígida, a discretização da conexão da coluna com a laje resulta em uma conexão flexível. Então, havendo um equilíbrio entre o número de nós tomados para simular a conexão, pode-se chegar a resultados satisfatórios, e que dispensam a obtenção de uma verdadeira

convergência.

Na tabela III.5, os autores [7] apresentam valores para o fator de rigidez K e para a largura efetiva. Foram utilizados diversos nós simulando a conexão da laje com a coluna. A laje analisada é quadrada e dois tamanhos relativos de coluna foram tomados, $U/A = 0,1$ e $0,2$. Em cada nó foram consideradas três componentes de forças P_i , M_{xi} e M_{yi} representando a interação das forças. Ainda, 40 termos da série foram usados para a determinação dos coeficientes de influência em cada um dos casos apresentados.

Os valores em parênteses são os erros, em porcentagem, entre os resultados através do método do coeficiente de influência e do método dos elementos finitos. A análise por elementos finitos utilizou malhas de 36 (6×6) e 144 (12×12) elementos, esta última está mostrada na figura III.8.

A diferença dos resultados obtidos entre as malhas também é apresentada na tabela III.5. Dos casos analisados o menor erro é encontrado quando $U/A = 0,1$ e apenas um nó de canto da coluna é tomado. Quanto maior o número de nós neste caso ($U/A = 0,1$) piores os resultados em relação aos gerados pela análise por elementos finitos, pois enquanto os erros de discretização são diminuídos, os de truncamento aumentam. No caso de uma coluna relativamente grande ($U/A = 0,2$) ao utilizar-se dois nós, um de canto e o outro na metade da distância entre o eixo da coluna e o lado da coluna paralelo a esse mesmo eixo, a diferença é de $-0,34$ para esta configuração.






U/A	0,1		0,2	
Rigidez à rotação e largura efetiva	K	B_{\bullet}/B	K	B_{\bullet}/B
Tipo de análise :				
Coeficiente de influência				
	8,4080	0,5226 (-0,08)	14,3432	0,6261 (-3,45)
	8,4988	0,5282 (0,99)	14,6524	0,6396 (-1,37)
	8,5276	0,5300 (1,34)	14,8070	0,6463 (-0,34)
	8,5502	0,5314 (1,61)	14,9094	0,6508 (0,34)
	8,5528	0,5316 (1,64)	14,9254	0,6515 (0,46)
Elementos Finitos				
Malha 6x6	8,4730	0,5266 (0,69)	14,9310	0,6517 (0,49)
Malha 12x12	8,4610	0,5230	14,8574	0,6485

Tabela III.5 - Valores de rigidez e largura efetiva para uma laje quadrada

Os autores [7] afirmam que usando somente um nó de canto para esse caso, o resultado através do coeficiente de influência está aproximadamente 3,5% abaixo do resultado por elementos finitos. Ainda, consideram este índice razoavelmente preciso para fins práticos.

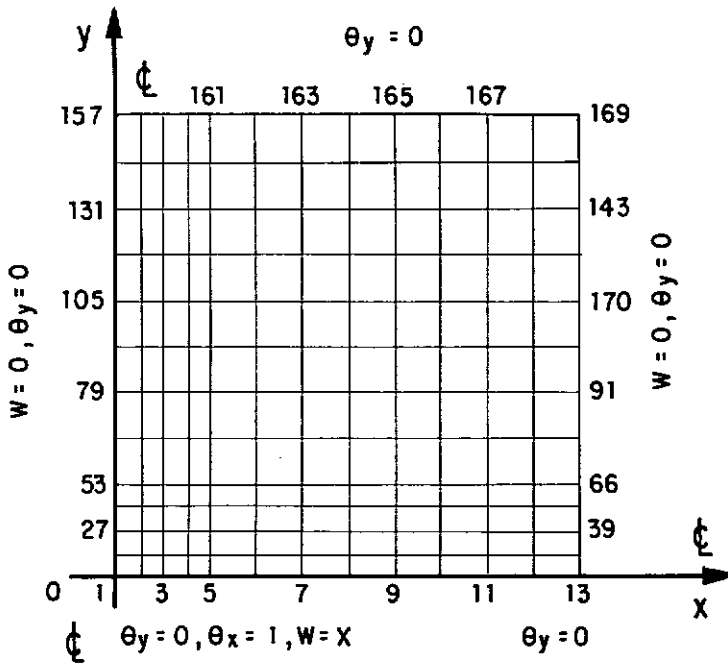


Fig. III.8 - Idealização em elementos finitos de um quadrante de laje.

Pode-se diminuir o custo computacional considerando-se uma série com menos termos onde no máximo dois nós são necessários para simular a conexão da coluna com a laje. Uma outra simplificação que pode ser efetuada é a não consideração do momento M_{yi} no vetor das forças nodais. Este efeito é mostrado na figura III.9, onde se utilizou um e dois nós para a conexão. São apresentados resultados com a inclusão e a exclusão da componente M_{yi} do vetor de forças nodais.

Verifica-se que, desprezando-se o momento M_{yi} , o resultado cai em menos de 2%. No entanto, a redução do número de termos tomados de 40 para 20 faz com que o

resultado aumente em menos de 3% para todas as configurações apresentadas. O aumento do número de termos da série de 40 para 50, diminui o resultado em menos de 1%.

A comparação feita com o resultado por meio do método dos elementos finitos fica em torno de 5%, quando se utiliza diversas representações da junção entre a coluna e a laje com o número de termos para a determinação dos coeficientes de influência na faixa de 20 a 40 termos da série. As larguras efetivas de laje são superestimadas quando apenas 10 termos da série são considerados. Apesar disso o maior erro está abaixo dos 10%.

A conclusão chegada pelos autores [7] é que para os casos práticos a utilização do método do coeficiente de influência com apenas um nó de canto da coluna e com as duas componentes de forças nodais, P_i e M_{xi} , tomando-se 20 termos da série, é econômica e leva a um grau aceitável de precisão. Apenas nos casos de colunas grandes ($U/A = 0,2$), pode-se considerar mais um nó para uma melhor representação da conexão da coluna com a laje.

Na análise por elementos finitos que serviu para a comparação dos resultados empregou-se um elemento de placa retangular, com 12 graus de liberdade, de Adini-Clough-Melosh.

A tabela III.6 apresenta uma série de valores para a largura efetiva de laje (B_e/B) para um painel típico interior com bordos longitudinais contínuos. Para garantir uma melhor precisão, a componente M_{yi} foi considerada e 40 termos da série foram utilizados.

Dos valores apresentados (tabela III.6) nota-se que a largura efetiva aumenta significativamente com a razão V/A , entre a largura da coluna e o lado longitudinal, perpendicular à direção do vetor do momento aplicado no centro da coluna, mantendo-se U/A constante.

U/A	nº de nós	forças nodais	Solução pelo coef. de influência					Solução através do M. E. F.
			Número de termos da série					
			10	20	30	40	50	
0,1	1	P, M_x	0,5594 (6,97)	0,5305 (1,43)	0,5207 (0,44)	0,5155 (1,43)	0,5121 (2,08)	0,5230
		P, M_x, M_y	0,5695 (8,89)	0,5388 (3,02)	0,5282 (0,99)	0,5226 (0,08)	0,5189 (0,78)	
	2	P, M_x	0,5675 (8,51)	0,5391 (3,08)	0,5307 (1,47)	0,5263 (0,63)	0,5234 (0,08)	
		P, M_x, M_y	0,5706 (9,10)	0,5430 (3,82)	0,5345 (2,20)	0,5300 (1,34)	0,5270 (0,76)	
0,2	1	P, M_x	0,6655 (2,62)	0,6356 (1,99)	0,6241 (3,76)	0,6176 (4,76)	0,6133 (5,53)	0,6485
		P, M_x, M_y	0,6775 (4,47)	0,6455 (0,46)	0,6331 (2,37)	0,6261 (3,45)	0,6213 (4,19)	
	2	P, M_x	0,6826 (5,26)	0,6571 (1,33)	0,6469 (0,25)	0,6408 (1,19)	0,6366 (1,84)	
		P, M_x, M_y	0,6894 (6,31)	0,6634 (2,30)	0,6527 (0,65)	0,6463 (0,34)	0,6419 (1,02)	

Figura III.9 - Valores de largura efetiva de lajes, B_e/B para uma laje quadrada.

B/A	U/A	V/A					
		0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20
0,5	0,00	0,458	0,573	0,629	0,663	0,686	0,699
	0,04	0,630	0,702	0,759	0,804	0,836	0,856
	0,08	0,699	0,757	0,803	0,842	0,872	0,892
	0,12	0,735	0,786	0,825	0,858	0,883	0,901
	0,16	0,748	0,795	0,831	0,859	0,880	0,895
	0,20	0,749	0,795	0,828	0,853	0,872	0,885
0,75	0,00	0,326	0,416	0,461	0,491	0,514	0,531
	0,04	0,465	0,526	0,576	0,620	0,656	0,685
	0,08	0,529	0,580	0,625	0,666	0,704	0,736
	0,12	0,567	0,614	0,654	0,692	0,727	0,759
	0,16	0,586	0,630	0,668	0,703	0,736	0,765
	0,20	0,594	0,637	0,673	0,706	0,736	0,764
1,0	0,00	0,249	0,319	0,355	0,380	0,398	0,413
	0,04	0,359	0,408	0,449	0,485	0,516	0,543
	0,08	0,412	0,453	0,490	0,526	0,559	0,590
	0,12	0,444	0,482	0,517	0,550	0,583	0,614
	0,16	0,461	0,498	0,531	0,562	0,593	0,623
	0,20	0,469	0,506	0,537	0,568	0,597	0,626
1,5	0,00	0,175	0,221	0,247	0,265	0,279	0,290
	0,04	0,242	0,276	0,304	0,329	0,351	0,370
	0,08	0,281	0,309	0,335	0,360	0,384	0,406
	0,12	0,302	0,329	0,353	0,377	0,400	0,423
	0,16	0,314	0,340	0,363	0,386	0,409	0,431
	0,20	0,321	0,346	0,369	0,391	0,413	0,435
2,0	0,00	0,140	0,173	0,194	0,209	0,221	0,230
	0,04	0,188	0,212	0,233	0,253	0,270	0,285
	0,08	0,214	0,235	0,255	0,273	0,291	0,308
	0,12	0,229	0,249	0,268	0,286	0,304	0,321
	0,16	0,239	0,258	0,276	0,294	0,311	0,328
	0,20	0,244	0,262	0,280	0,297	0,314	0,331

Tabela III.6 - Largura efetiva de lajes com bordos longitudinais contínuos (B_o/B)

CAPÍTULO IV

OBTENÇÃO DE LARGURAS EFETIVAS DE LAJES SEM VIGAMENTO POR
MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOSIV.1 - Formulação da Largura Efetiva de Lajes sem
vigamento em prédios lateralmente carregados

Uma forma de encontrar a porção da laje da figura I.14c que trabalha como uma viga é igualar as rotações causadas por um momento aplicado no centro da laje e no centro de uma viga que contenha um segmento infinitamente rígido no meio do vão da mesma, simulando a coluna rígida, e que possua uma altura igual a espessura da laje, como na figura IV.1a.

Para obter-se uma expressão para a deformação da viga considerada, utilizou-se o método do diagrama de momentos fletores. Nesse método, a flecha e a declividade em um ponto qualquer de uma viga são encontradas através de determinadas propriedades geométricas da linha elástica. Inicialmente, obtém-se o diagrama que representa a variação da grandeza M/EI ao longo do comprimento da viga, ou seja, divide-se o diagrama de momentos fletores pela rigidez flexional EI . Esses dois diagramas estão mostrados, para o caso particular da viga da figura IV.1a, nas figuras IV.1b e IV.1c. A partir daí são calculadas determinadas áreas desse novo diagrama e também os momentos estáticos das mesmas. O motivo da escolha deste método é que ele é de certo modo prático para vigas de

seção transversal variável, como é o caso apresentado.

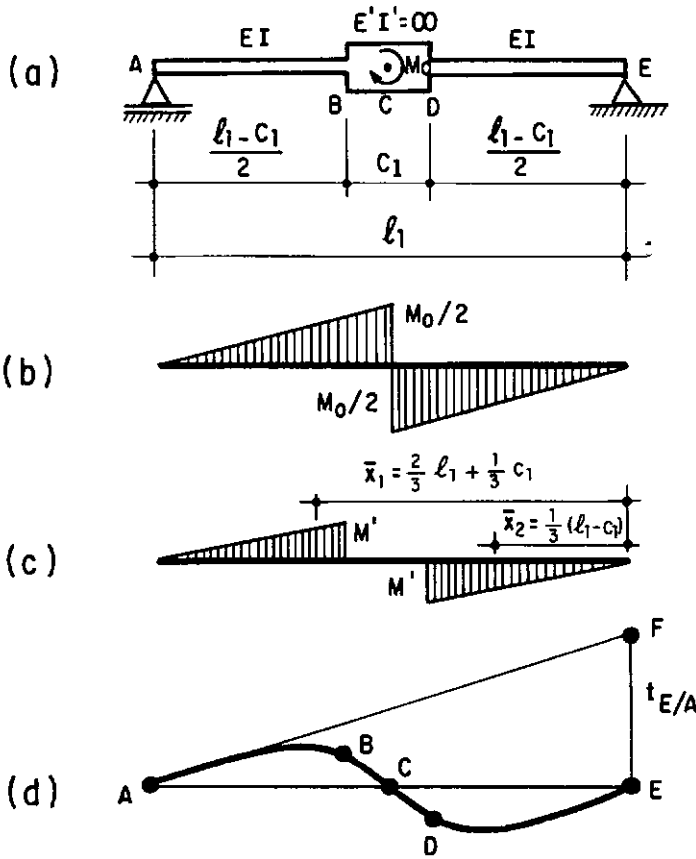


Fig. IV.1 - Idealização da viga para o cálculo largura efetiva da laje.

Na figura IV.1d está representada a deformada da viga, bem como o desvio tangencial do ponto E em relação ao ponto A. Essa distância é designada por $t_{E/A}$ e é o momento estático, em relação a um eixo vertical que passa por E, da área do diagrama de (M/EI) situado entre E e A.

Assim,

$$t_{E/A} = \int_E^A x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (\text{IV.1})$$

Onde $(M/EI) dx$ representa um elemento de área sob o diagrama de (M/EI) e onde $x_1 (M/EI) dx$ é o momento estático de cada elemento de área em relação ao eixo vertical que passa por E. Para o caso da figura IV.1a, tem-se :

$$t_{E/A} = \frac{M' l_1 (1 - c_1)}{6} + \frac{M' c_1 (1 - c_1)}{12} - \frac{M' (1 - c_1)^2}{12}$$

É fácil notar, por proporção de triângulos, que

$$M' = \frac{M_o}{2EI} \left[1 - \frac{c_1}{l_1} \right]. \text{ Então, fazendo } g = \left[1 - \frac{c_1}{l_1} \right] :$$

$$t_{E/A} = \frac{M_o l_1^2}{12EI} g^2 + \frac{M_o l_1 c_1}{24EI} g^2 - \frac{M_o l_1^2}{24EI} g^3$$

$$t_{E/A} = \frac{M_o l_1}{12EI} g^2 \left[l_1 + c_1/2 - l_1/2 + c_1/2 \right]$$

$$t_{E/A} = \frac{M_o l_1}{12EI} \left[1 - \frac{c_1}{l_1} \right]^2 \left[\frac{l_1}{2} + c_1 \right] \quad (\text{IV.2})$$

Uma vez que se tem o valor do desvio tangencial $t_{E/A}$, o próximo passo é achar a declividade no ponto médio da viga.

Seja $\theta_{B/A}$ o ângulo formado pelas tangentes à linha elástica em A e B, e θ_A a declividade no ponto A,

tem-se [14] :

$$\theta_{B/A} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx \quad (IV.3)$$

Desta forma, $\theta_{B/A}$ é a área sob o diagrama de (M/EI) entre A e B. Partindo-se da hipótese que a viga sofre pequenas deformações, pode-se considerar a seguinte expressão para a declividade no ponto A :

$$\theta_A = - \frac{t_{E/A}}{l_1} \quad (IV.4)$$

Da figura IV.1d pode-se notar que as declividades nos pontos B e C possuem o mesmo valor devido a rigidez infinita na região da coluna. Assim $\theta_B = \theta_C$, tem-se

$$\theta_B = \theta_C = \theta_A + \theta_{B/A} \quad (IV.5)$$

Substituindo as equações (IV.3) e (IV.4) em (IV.5), obtém-se :

$$\begin{aligned} \theta_C = - \left[\frac{M_o}{12EI} \left(1 - \frac{c_1}{l_1} \right)^2 \left(\frac{l_1}{2} + c_1 \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{M_o}{EI} \left(1 - \frac{c_1}{l_1} \right) \right] \frac{(l_1 - c_1)}{2} \quad (IV.6) \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior chega-se a seguinte expressão :

$$\theta_c = \frac{M_o l_1}{12EI} \left(1 - \frac{c_1}{l_1} \right)^3 \quad (\text{IV.7})$$

Essa fórmula é a mesma para vigas de seção constante, a menos do termo redutor da flexibilidade, $\left(1 - \frac{c_1}{l_1} \right)^3$.

Substituindo-se em (IV.7) a expressão do momento de inércia para uma viga com base b_o e altura h , igual à espessura da laje, e tirando-se o valor de b_o , tem-se :

$$b_o = \frac{M_o l_1}{E \theta_c h^3} \left(1 - \frac{c_1}{l_1} \right)^3 \quad (\text{IV.8})$$

Fazendo-se com que o valor de θ_c seja o mesmo do ângulo central da laje da figura I.14c causado pelo mesmo momento M_o , b_o torna-se a largura efetiva da referida laje.

IV.2 - Tipo do Elemento Utilizado na Análise e Metodologia

Na fórmula (IV.8), apresentada no item anterior, a obtenção da declividade θ_c para um determinado momento fletor M_o se torna essencial. Nesse trabalho foi utilizado um elemento padrão retangular de placa com 12 graus de liberdade, com diversas malhas em elementos finitos para diferentes configurações de lajes.

Todos os resultados apresentados neste capítulo são baseados no comportamento elástico linear e o material

das lajes é suposto isotrópico. Foram discretizados diversos quadrantes de elementos típicos de painéis com razões entre os lados variando num intervalo de 0,5 a 2, sendo levadas em consideração condições de contorno adequadas. Essas condições de contorno são as mesmas apresentadas pela maioria dos pesquisadores [3,5,6,7], ou seja, considerando os bordos paralelos ao vetor representativo do momento atuante, simplesmente apoiados, enquanto que os outros dois possuem restrições à rotação em torno da direção que os contém, ao longo dos mesmos.

As diversas malhas utilizadas para as sete configurações de lajes são apresentadas na figura IV.2a à IV.3g. A escolha dessas malhas foi feita a partir de um estudo de convergência utilizando-se não só malhas inferiores e superiores, mas também o número de elementos foi escolhido de forma que apenas uma malha fosse gerada para cada configuração de laje, enquanto que as dimensões da coluna variavam. Observando-se as diversas malhas, a que apresenta maior diferença entre as dimensões de cada elemento é a da figura IV.2a, cuja a proporção é 1/14,24. No entanto, teve-se garantia de bons resultados pois essa mesma malha foi mais subdividida chegando-se a proporção de 1/7,12 com diferença de resultados de larguras efetivas em torno 0,5%.

Para simular uma coluna rígida foi utilizada uma rigidez na região de contato igual a 10^7 vezes a rigidez da laje. Um momento unitário foi aplicado no ponto relativo ao centro da coluna e a declividade obtida pelo PROGRAMA SUPERSAP que faz uso do método dos elementos

finitos, é igual, para o caso em estudo, a $4\theta_c$, uma vez que foi utilizado apenas um quadrante do elemento típico de painel. A partir dos valores obtidos para θ_c foram calculadas diversas larguras efetivas para várias configurações de lajes. Vale salientar que isso foi feito supondo que a presença da coluna faça com que a laje seja considerada infinitamente rígida à flexão, na região de conexão, e ocorra uma deformação elástica da placa na região restante da mesma, como nas figuras IV.3a a IV.3c.

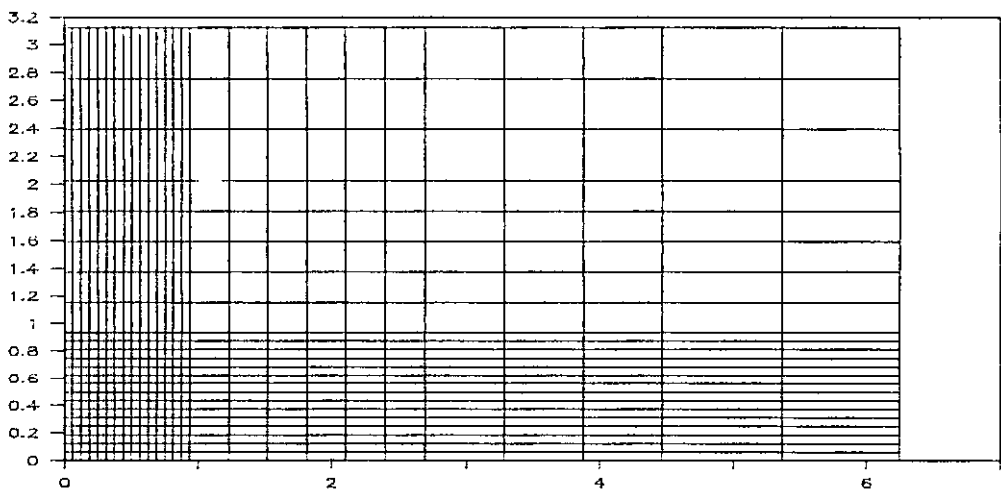


Figura IV.2a - malha utilizada para $l_1/l_2 = 0.50$

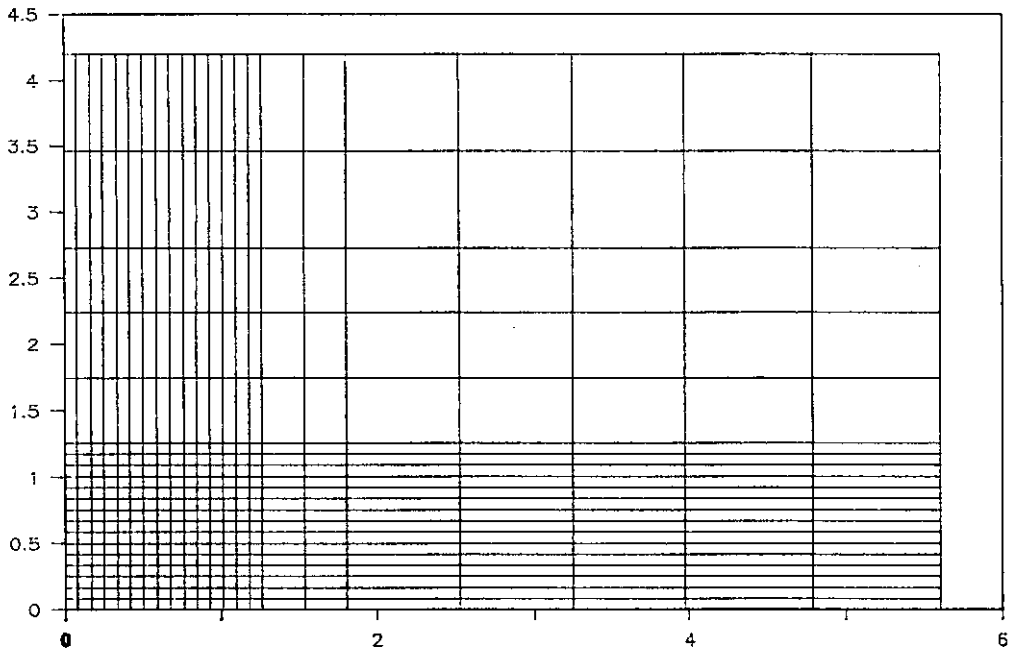


Figura IV.2b - malha utilizada para $l_1/l_2 = 0,67$

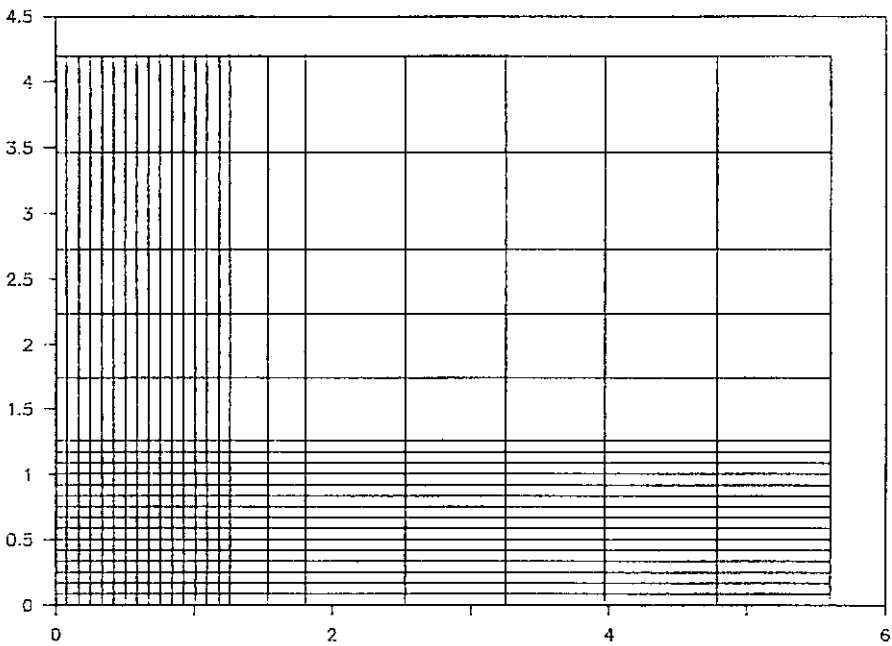


Figura IV.2c - malha utilizada para $l_1/l_2 = 0,75$

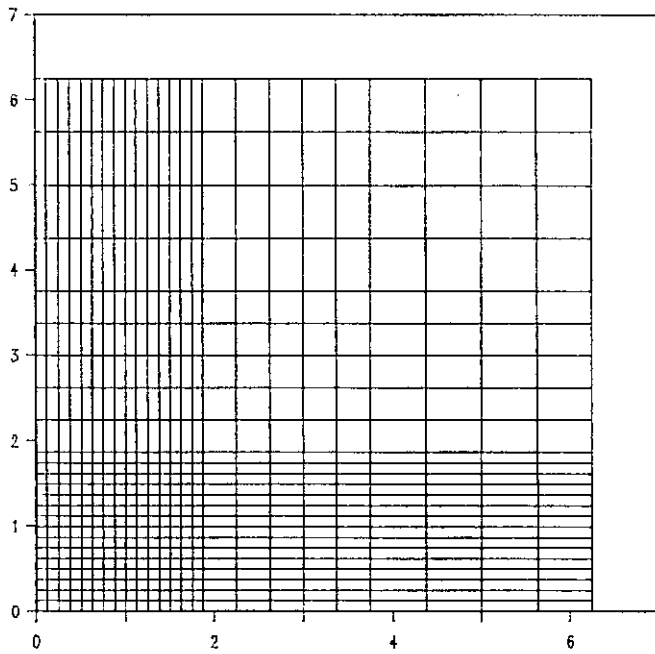


Figura IV.2d - malha utilizada para $l_1/l_2 = 1,00$

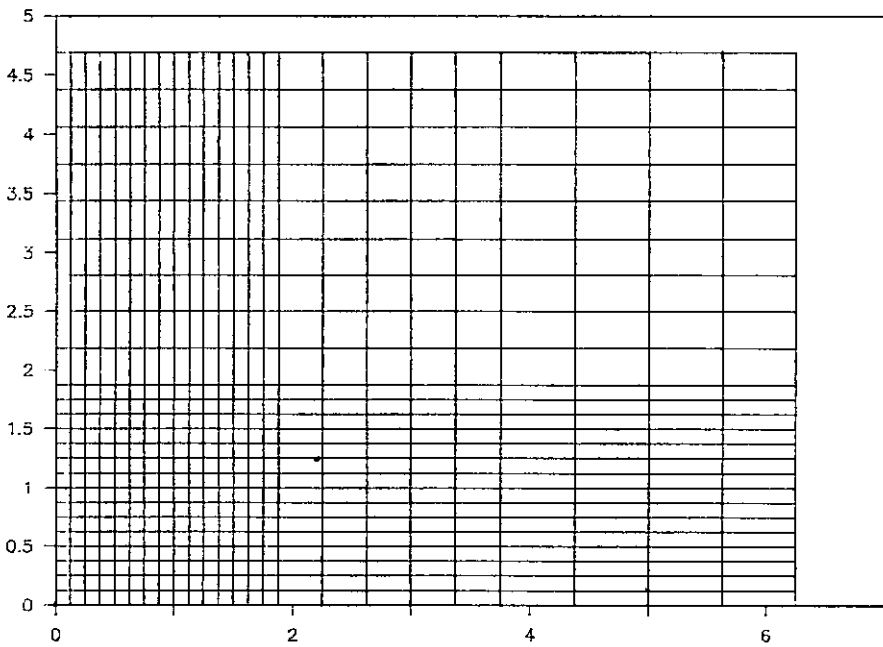


Figura IV.2e - malha utilizada para $l_1/l_2 = 1,33$

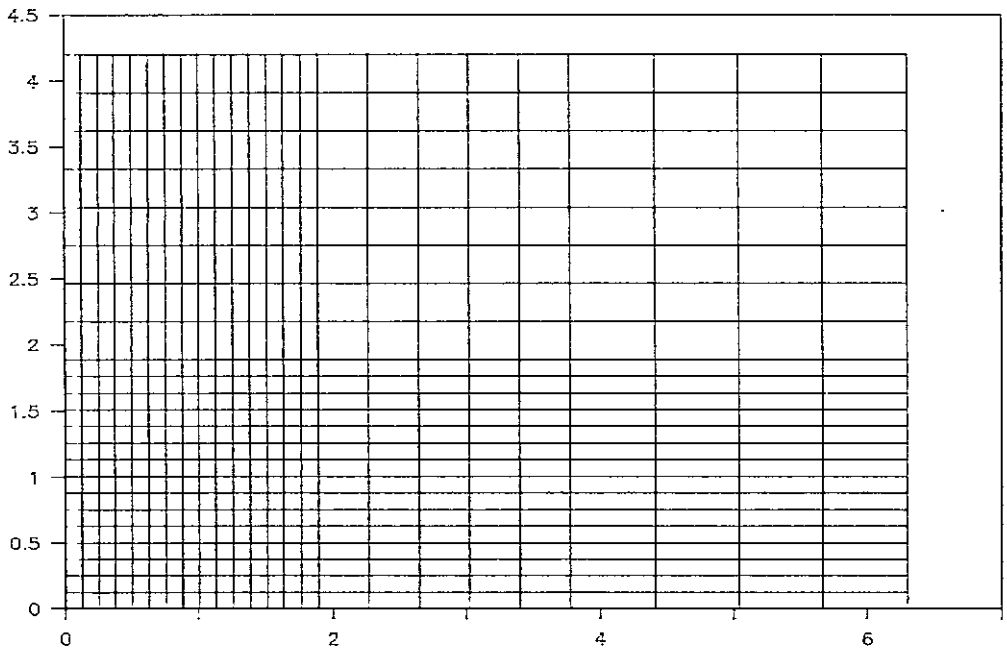


Figura IV.2f - malha utilizada para $l_1/l_2 = 1,50$

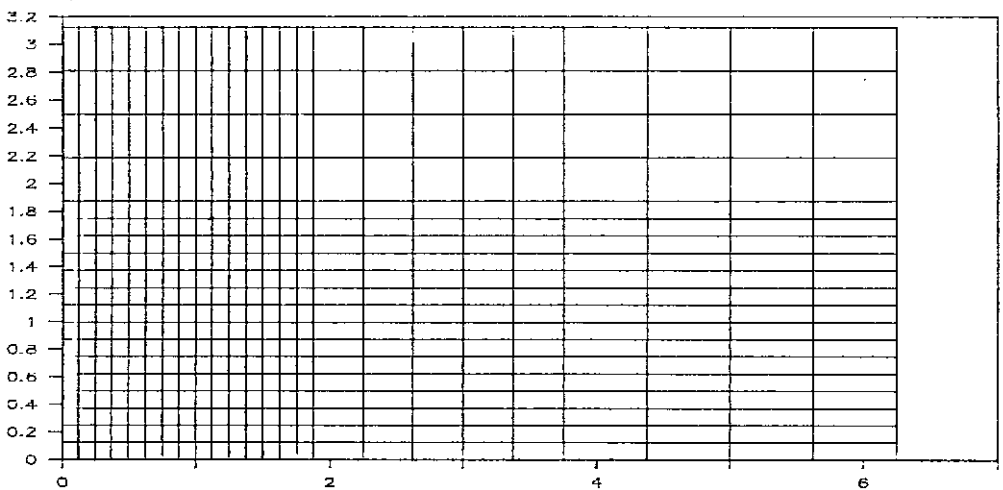


Figura IV.2g - malha utilizada para $l_1/l_2 = 2,00$

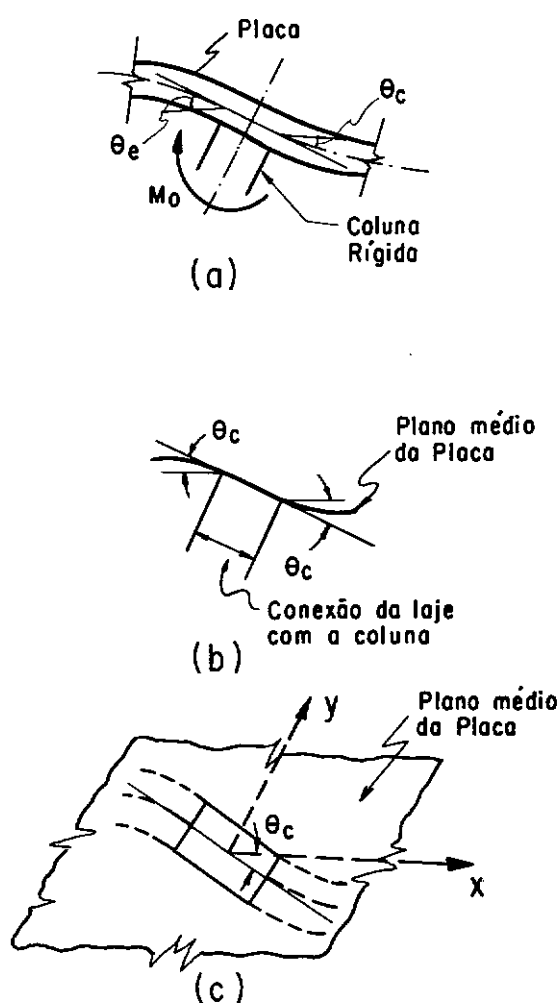


Fig. IV.3 - Rotação de corpo rígida na conexão da coluna com a laje.

IV.3 - Resultados e Conclusões

Inicialmente, foram obtidos através do programa de análise estrutural (SUPERSAP) que utiliza o método dos elementos finitos, diversos valores de θ_c e, conseqüentemente, também valores de larguras efetivas de

lajes para lajes com razões entre os lados iguais a 1 e 2. Foram calculados 100 valores para cada laje com c_1/l_1 e c_2/l_1 variando de 0,02 a 0,20, onde c_1 e c_2 são as dimensões da coluna nas direções perpendicular e paralela à direção do vetor representativo do momento, respectivamente; l_1 é o vão da laje na direção perpendicular à direção deste mesmo vetor. Esses valores de larguras efetivas são apresentados nas tabelas IV.1 e IV.2.

Como indicado nessas tabelas, o valor do coeficiente de Poisson (ν) considerado foi 0,15. Porém, uma vez que a rigidez à flexão da laje, incluída no cálculo de θ_c , é igual a $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, pode-se facilmente

encontrar os valores contidos nessas tabelas para qualquer valor de ν , multiplicando-se os valores de larguras efetivas apresentados nessas tabelas pela razão $r = \frac{1-\nu^2}{1-\nu_q^2}$,

onde $\nu = 0,15$ e ν_q é o novo valor do coeficiente de Poisson que se quer considerar. Supondo, por exemplo, que se queira encontrar o valor da largura efetiva de um elemento típico quadrado de laje, com $\nu = 0,20$, onde as razões $\frac{c_1}{l_1}$ e $\frac{c_2}{l_1}$ valem 0,16 e 0,06, respectivamente.

Para este caso, então, $r = 1,018$ e o novo valor para b_e/l_2 é 0,522. Valores como estes foram verificados também através do programa de análise estrutural. Como a maioria dos trabalhos anteriormente expostos utilizaram valores para ν igual a 0,15, por conveniência, tomou-se, também, este valor para o cálculo das larguras efetivas de lajes

apresentadas para que se tornasse possível um estudo comparativo.

A partir dos valores apresentados nas tabelas IV.1 e IV.2 foram construídos os gráficos mostrados na figura IV.4a à IV.4h. Observando-se os gráficos apresentados na figura IV.4a à IV.4d, em que os valores de c_2/l_1 variam, enquanto que os de c_1/l_1 permanecem constantes pode-se considerar que os valores de b_e/l_2 variam linearmente tanto para os valores de $l_1/l_2 = 1$ como para $l_1/l_2 = 2$. Por outro lado, essa consideração não se verifica quando os valores de c_1/l_1 variam, enquanto c_2/l_1 mantém-se constante.

Apesar dessa consideração, as tabelas IV.3 e IV.4 apresentam valores provenientes de interpolação linear a partir da fixação dos quatro valores extremos da tabela destacados, e também o erro relativo entre o valor encontrado através do método dos elementos finitos e o interpolado. Esse erro não é superior a 10,12% para o caso de uma laje quadrada e a 9,75% para o caso em que a razão entre os lados é 2. Esses erros ainda podem ser considerados razoáveis, pois a maioria dos pesquisadores [3,4,5,6,7] admitem que um erro em torno desses valores é uma boa aproximação.

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1									
		0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160	0,180	0,200
1	0,020	0,332	0,361	0,387	0,411	0,434	0,456	0,478	0,499	0,520	0,540
	0,040	0,374	0,399	0,423	0,446	0,467	0,489	0,510	0,530	0,550	0,570
	0,060	0,403	0,427	0,449	0,471	0,492	0,512	0,533	0,553	0,572	0,592
	0,080	0,425	0,448	0,469	0,490	0,511	0,531	0,550	0,570	0,589	0,609
	0,100	0,443	0,464	0,485	0,505	0,525	0,545	0,564	0,584	0,603	0,622
	0,120	0,456	0,477	0,497	0,517	0,536	0,556	0,575	0,594	0,613	0,632
	0,140	0,466	0,486	0,506	0,526	0,545	0,564	0,583	0,602	0,621	0,639
	0,160	0,474	0,493	0,513	0,532	0,552	0,570	0,589	0,608	0,626	0,645
	0,180	0,479	0,499	0,518	0,537	0,556	0,575	0,593	0,612	0,630	0,649
	0,200	0,483	0,502	0,521	0,540	0,559	0,577	0,596	0,614	0,633	0,651

Tabela IV.1 - Valores de b_0/l_2 para lajes com bordos contínuos

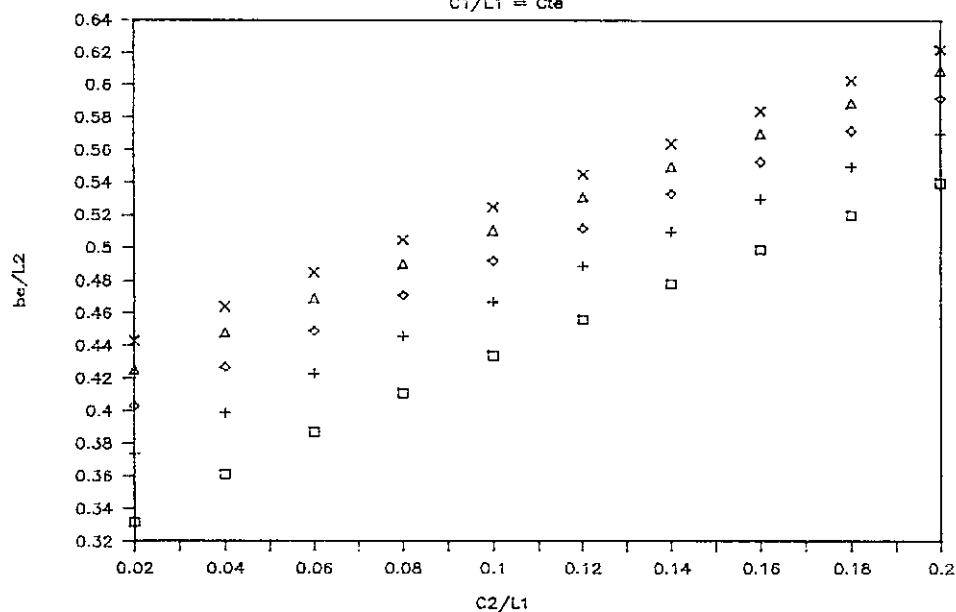
($\nu = 0,15$)

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1									
		0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160	0,180	0,200
2	0,020	0,591	0,636	0,675	0,710	0,743	0,773	0,802	0,828	0,853	0,876
	0,040	0,652	0,689	0,723	0,755	0,784	0,811	0,836	0,860	0,882	0,902
	0,060	0,691	0,724	0,755	0,784	0,810	0,835	0,858	0,879	0,899	0,917
	0,080	0,718	0,749	0,777	0,803	0,828	0,851	0,872	0,892	0,910	0,926
	0,100	0,737	0,765	0,792	0,817	0,840	0,861	0,881	0,899	0,916	0,932
	0,120	0,750	0,777	0,802	0,825	0,847	0,867	0,886	0,904	0,919	0,934
	0,140	0,758	0,784	0,808	0,830	0,851	0,871	0,889	0,905	0,921	0,935
	0,160	0,763	0,788	0,811	0,833	0,853	0,872	0,889	0,905	0,920	0,934
	0,180	0,765	0,789	0,812	0,833	0,853	0,871	0,888	0,904	0,919	0,932
	0,200	0,765	0,789	0,811	0,832	0,851	0,870	0,886	0,902	0,917	0,930

Tabela IV.2 - Valores de b_e/l_2 para lajes com bordos contínuos($\nu = 0,15$)

$$L1/L2 = 1$$

$$C1/L1 = \text{Cte}$$

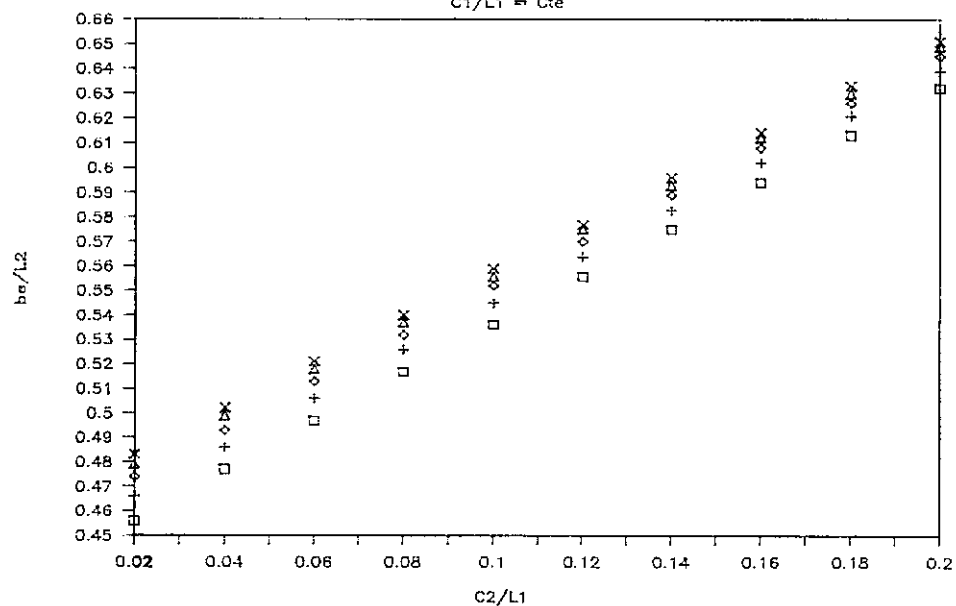


$$\begin{array}{ccccc} \square & + & \diamond & \triangle & \times \\ \frac{C_1}{L_1} = 0.02 & \frac{C_1}{L_1} = 0.04 & \frac{C_1}{L_1} = 0.06 & \frac{C_1}{L_1} = 0.08 & \frac{C_1}{L_1} = 0.10 \end{array}$$

Figura IV.4a

$$L1/L2 = 1$$

$$C1/L1 = \text{Cte}$$

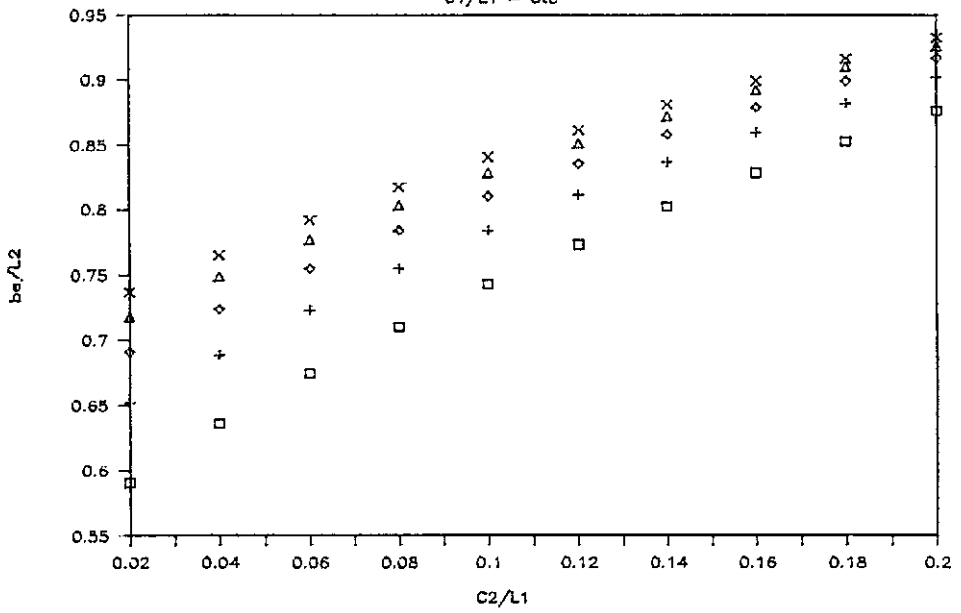


$$\begin{array}{ccccc} \square & + & \diamond & \triangle & \times \\ \frac{C_1}{L_1} = 0.12 & \frac{C_1}{L_1} = 0.14 & \frac{C_1}{L_1} = 0.16 & \frac{C_1}{L_1} = 0.18 & \frac{C_1}{L_1} = 0.20 \end{array}$$

Figura IV.4b

$$L1/L2 = 2$$

$$C1/L1 = \text{Cte}$$

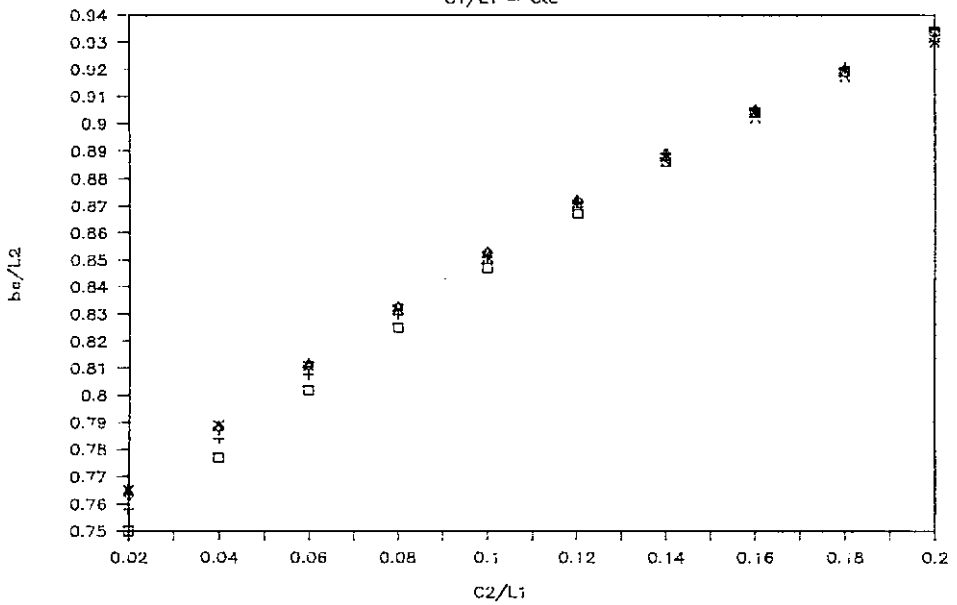


$$\begin{array}{ccccc} \square & + & \diamond & \Delta & \times \\ \frac{C_1}{L_1} = 0.02 & \frac{C_1}{L_1} = 0.04 & \frac{C_1}{L_1} = 0.06 & \frac{C_1}{L_1} = 0.08 & \frac{C_1}{L_1} = 0.10 \end{array}$$

Figura IV.4c

$$L1/L2 = 2$$

$$C1/L1 = \text{Cte}$$

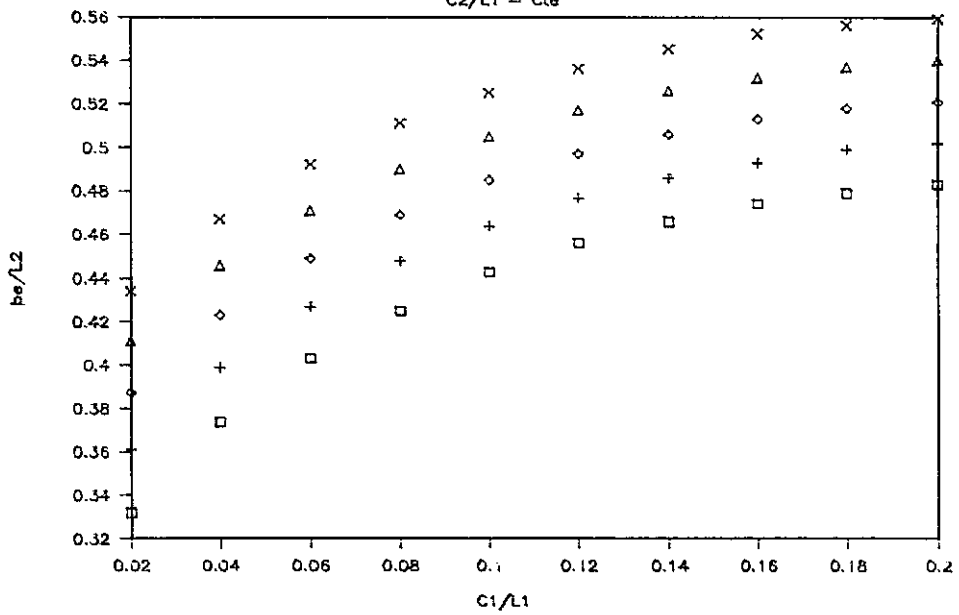


$$\begin{array}{ccccc} \square & + & \diamond & \Delta & \times \\ \frac{C_1}{L_1} = 0.12 & \frac{C_1}{L_1} = 0.14 & \frac{C_1}{L_1} = 0.16 & \frac{C_1}{L_1} = 0.18 & \frac{C_1}{L_1} = 0.20 \end{array}$$

Figura IV.4d

$$L1/L2 = 1$$

$$C2/L1 = \text{Cte}$$



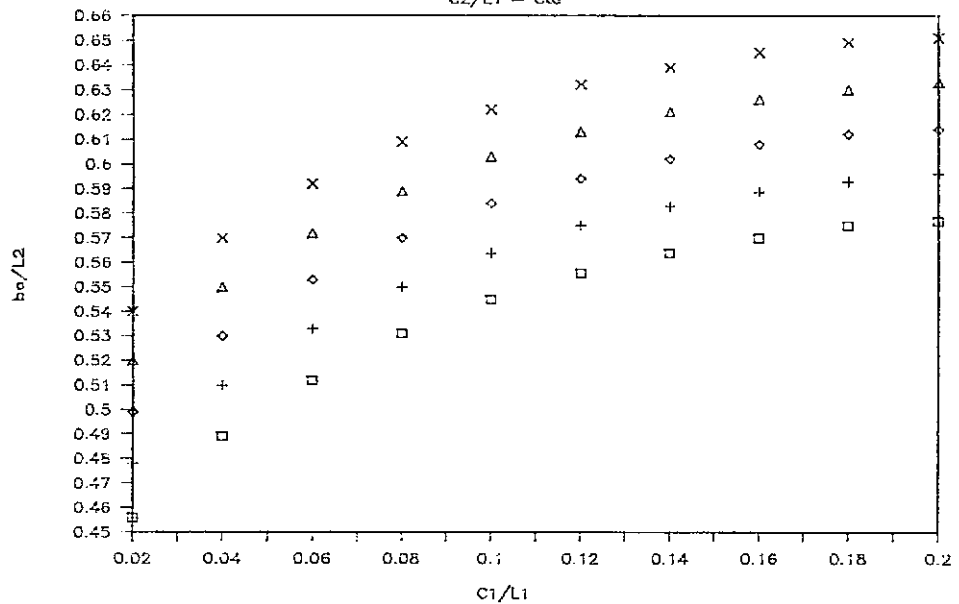
$$\square \quad + \quad \diamond \quad \Delta \quad \times$$

$$\frac{C_2}{L_1} = 0,02 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,04 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,06 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,08 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,10$$

Figura IV.4e

$$L1/L2 = 1$$

$$C2/L1 = \text{Cte}$$



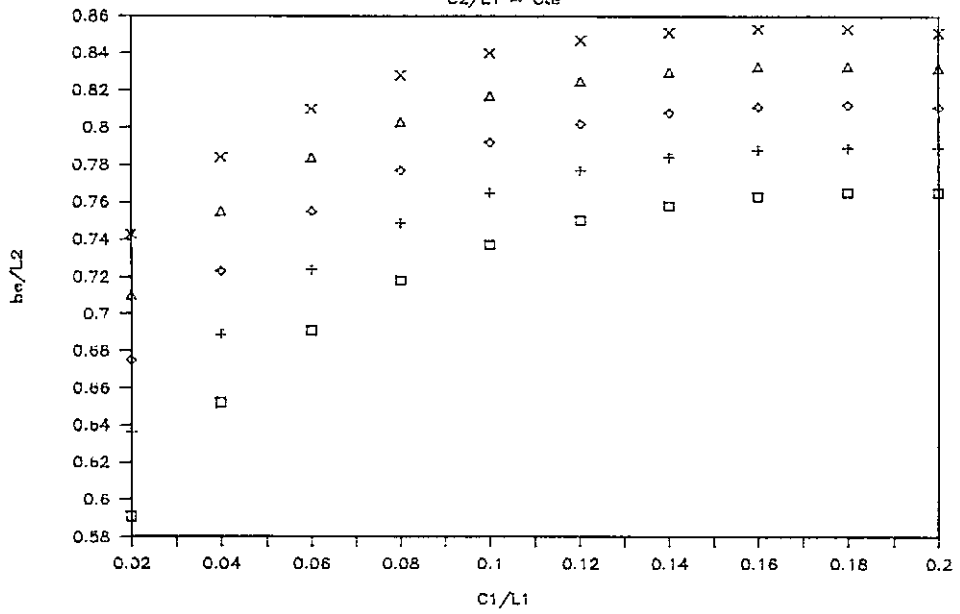
$$\square \quad + \quad \diamond \quad \Delta \quad \times$$

$$\frac{C_2}{L_1} = 0,12 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,14 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,16 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,18 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0,20$$

Figura IV.4f

$$L1/L2 = 2$$

$$C2/L1 = \text{Cte}$$



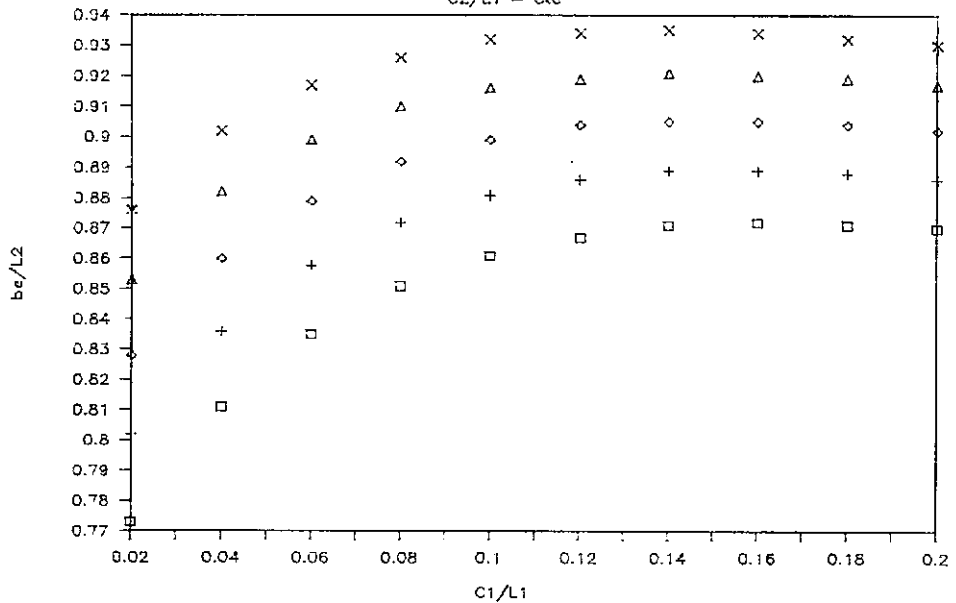
$$\square \quad + \quad \diamond \quad \Delta \quad \times$$

$$\frac{C_2}{L_1} = 0.02 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.04 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.06 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.08 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.10$$

Figura IV.4g

$$L1/L2 = 2$$

$$C2/L1 = \text{Cte}$$



$$\square \quad + \quad \diamond \quad \Delta \quad \times$$

$$\frac{C_2}{L_1} = 0.12 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.14 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.16 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.18 \quad \frac{C_2}{L_1} = 0.20$$

Figura IV.4h

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2 / l_1										Erro relativo (%)
	Valor interpolado										
	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160	0,180	0,200	
0,020	—	-1,66	-2,33	-2,43	-2,30	-1,75	-1,46	-1,00	-0,58	—	
	0,332	0,355	0,378	0,401	0,424	0,448	0,471	0,494	0,517	0,540	
0,040	-6,68	-6,77	-6,86	-6,50	-6,00	-5,52	-5,10	-4,34	-3,82	-3,16	
	0,349	0,372	0,394	0,417	0,439	0,462	0,484	0,507	0,529	0,552	
0,060	-9,18	-9,13	-8,69	-8,28	-7,72	-6,84	-6,38	-5,79	-5,07	-4,56	
	0,366	0,388	0,410	0,432	0,454	0,477	0,499	0,521	0,543	0,565	
0,080	-10,12	-9,82	-9,38	-8,78	-8,22	-7,72	-6,91	-6,32	-5,77	-5,25	
	0,382	0,404	0,425	0,447	0,469	0,490	0,512	0,534	0,555	0,577	
0,100	-9,93	-9,48	-9,07	-8,51	-8,00	-7,34	-6,74	-6,34	-5,80	-5,31	
	0,399	0,420	0,441	0,462	0,483	0,505	0,526	0,547	0,568	0,589	
0,120	-8,77	-8,39	-8,05	-7,54	-6,90	-6,65	-6,09	-5,56	-5,22	-4,75	
	0,416	0,437	0,457	0,478	0,499	0,519	0,540	0,561	0,581	0,602	
0,140	-7,03	-6,79	-6,52	-6,27	-5,87	-5,32	-4,97	-4,65	-4,35	-3,91	
	0,433	0,453	0,473	0,493	0,513	0,534	0,554	0,574	0,594	0,614	
0,160	-5,27	-4,87	-4,87	-4,51	-4,35	-4,04	-3,74	-3,45	-3,19	-2,95	
	0,449	0,469	0,488	0,508	0,528	0,547	0,567	0,587	0,606	0,626	
0,180	-2,71	-2,81	-2,70	-2,42	-2,34	-2,26	-2,02	-1,80	-1,59	-1,54	
	0,466	0,485	0,504	0,524	0,543	0,562	0,581	0,601	0,620	0,639	
0,200	—	—	-0,19	-0,19	-0,18	-0,17	-0,17	—	-0,16	—	
	0,483	0,502	0,520	0,539	0,558	0,576	0,595	0,614	0,632	0,651	

Tabela IV.3 - Valores de b_0/l_2 interpolados, $l_1/l_2 = 1$ ($\nu = 0,15$)

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2 / l_1										Erro relativo (%)
	Valor interpolado										
	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160	0,180	0,200	
0,020	—	-2,04	-3,11	-3,38	-3,36	-3,10	-2,62	-1,81	-1,06	—	
	0,591	0,623	0,654	0,686	0,718	0,749	0,781	0,813	0,844	0,876	
0,040	-6,44	-7,11	-7,33	-7,15	-6,76	-6,17	-5,38	-4,42	-3,40	-2,22	
	0,610	0,640	0,670	0,701	0,731	0,761	0,791	0,822	0,852	0,882	
0,060	-8,83	-8,98	-9,01	-8,67	-8,02	-7,43	-6,53	-5,46	-4,45	-3,16	
	0,630	0,659	0,687	0,716	0,745	0,773	0,802	0,831	0,859	0,888	
0,080	-9,61	-9,75	-9,52	-8,97	-8,45	-7,76	-6,88	-5,83	-4,73	-3,46	
	0,649	0,676	0,703	0,731	0,758	0,785	0,812	0,840	0,867	0,894	
0,100	-9,36	-9,28	-9,09	-8,81	-8,21	-7,43	-6,58	-5,67	-4,59	-3,43	
	0,668	0,694	0,720	0,745	0,771	0,797	0,823	0,848	0,874	0,900	
0,120	-8,27	-8,37	-8,23	-7,76	-7,32	-6,69	-5,98	-5,09	-4,03	-3,00	
	0,688	0,712	0,736	0,761	0,785	0,809	0,833	0,858	0,882	0,906	
0,140	-6,73	-6,89	-6,81	-6,63	-6,23	-5,74	-5,06	-4,31	-3,47	-2,46	
	0,707	0,730	0,753	0,775	0,798	0,821	0,844	0,866	0,889	0,912	
0,160	-4,85	-5,20	-5,18	-5,16	-4,92	-4,47	-3,94	-3,31	-2,50	-1,71	
	0,726	0,747	0,769	0,790	0,811	0,833	0,854	0,875	0,897	0,918	
0,180	-2,48	-2,92	-3,20	-3,36	-3,28	-2,99	-2,59	-2,21	-1,63	-0,86	
	0,746	0,766	0,786	0,805	0,825	0,845	0,865	0,884	0,904	0,924	
0,200	—	-0,76	-1,11	-1,44	-1,53	-1,49	-1,24	-1,00	-0,55	—	
	0,765	0,783	0,802	0,820	0,838	0,857	0,875	0,893	0,912	0,930	

Tabela IV.4 - Valores de b_0/l_2 interpolados, $l_1/l_2 = 2$ ($\nu = 0,15$)

Levando-se em conta que existe uma variação linear para os valores de larguras efetivas, quando c_2/l_1 varia e c_1/l_1 mantém-se constante, e que a interpolação linear para o caso contrário, em que c_1/l_1 varia e c_2/l_1 mantém-se constante, é uma boa aproximação em intervalos menores, ou seja, fixando-se um número maior de valores de larguras efetivas para este caso, foram construídas as tabelas IV.5 a IV.9, onde aparecem 15 valores de larguras efetivas para cada uma das configurações de lajes consideradas. Qualquer outro valor desejado deve ser obtido através de interpolação ou extrapolação linear. Vale salientar que fazendo-se o mesmo com os valores das tabelas IV.1 e IV.2, o maior erro relativo não ultrapassou 1,52% para ambos os casos. Isso sem levar em conta que 26 valores além dos fixados não apresentaram erro para o caso de laje quadrada, como mostram as tabelas IV.10 e IV.11, o que demonstra ser este um procedimento eficiente. Pode-se notar, ainda, que os valores da coluna do meio das tabelas IV.5 a IV.9 são aproximadamente a média aritmética entre os valores extremos, o que mais uma vez supõe a linearidade considerada.

Observando-se uma vez mais os valores apresentados nas tabelas IV.1 e IV.2 e os diagramas das figuras IV.4a a IV.4h, pode-se concluir que a largura efetiva de laje depende, principalmente, da dimensão da coluna na direção do vetor representante do momento atuante e da razão entre os lados. Depois, um pouco menos, da outra dimensão da coluna.

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1		
		0,040	0,100	0,160
0,50	0,020	0,183	0,221	0,255
	0,060	0,217	0,251	0,283
	0,100	0,237	0,269	0,300
	0,140	0,249	0,280	0,311
	0,180	0,256	0,286	0,317

Tabela IV.5 - Valores de b_e/l_2 para lajes com bordos contínuos ($\nu = 0,15$)

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1		
		0,040	0,100	0,160
0,67	0,020	0,246	0,297	0,344
	0,060	0,293	0,339	0,383
	0,100	0,320	0,364	0,407
	0,140	0,336	0,379	0,421
	0,180	0,346	0,388	0,430

Tabela IV.6 - Valores de b_e/l_2 para lajes com bordos contínuos ($\nu = 0,15$)

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1		
		0,040	0,100	0,160
0,75	0,020	0,275	0,333	0,384
	0,060	0,328	0,379	0,428
	0,100	0,357	0,406	0,454
	0,140	0,376	0,423	0,470
	0,180	0,386	0,432	0,479

Tabela IV.7 - Valores de b_o/l_1 para lajes com bordos contínuos ($\nu = 0,15$)

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1		
		0,040	0,100	0,160
1,33	0,020	0,468	0,559	0,637
	0,060	0,548	0,627	0,698
	0,100	0,592	0,664	0,731
	0,140	0,616	0,685	0,748
	0,180	0,629	0,695	0,756

Tabela IV.8 - Valores de b_o/l_1 para lajes com bordos contínuos ($\nu = 0,15$)

$\frac{l_1}{l_2}$	$\frac{c_1}{l_1}$	c_2/l_1		
		0,040	0,100	0,160
1,50	0,020	0,515	0,613	0,696
	0,060	0,601	0,683	0,756
	0,100	0,645	0,720	0,787
	0,140	0,669	0,739	0,802
	0,180	0,681	0,747	0,807

Tabela IV.9 - Valores de b_e/l_1 para lajes com bordos contínuos ($\nu = 0,15$)

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2 / l_1									
	Erro relativo (%) Valor interpolado									
	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160	0,180	0,200
0,020	1,51	—	-0,52	-0,24	—	—	-0,21	—	0,19	0,37
	0,337	0,361	0,385	0,410	0,434	0,456	0,477	0,499	0,521	0,542
0,040	-0,80	-1,25	-1,42	-1,35	-0,86	-1,02	-0,98	-0,75	-0,55	-0,35
	0,371	0,394	0,417	0,440	0,463	0,484	0,505	0,526	0,547	0,568
0,060	0,50	—	—	-0,21	—	—	—	—	0,17	0,34
	0,405	0,427	0,449	0,470	0,492	0,512	0,533	0,553	0,573	0,594
0,080	—	-0,45	-0,43	-0,41	-0,39	-0,38	-0,18	-0,18	—	—
	0,425	0,446	0,467	0,488	0,509	0,529	0,549	0,569	0,589	0,609
0,100	0,23	—	-0,21	—	—	—	—	—	0,17	0,16
	0,444	0,464	0,484	0,505	0,525	0,545	0,564	0,584	0,604	0,623
0,120	-0,22	-0,42	-0,40	-0,39	-0,19	-0,36	-0,17	-0,17	-0,16	—
	0,455	0,475	0,495	0,515	0,535	0,554	0,574	0,593	0,612	0,632
0,140	—	—	—	-0,19	—	—	—	—	—	0,16
	0,466	0,486	0,506	0,525	0,545	0,564	0,583	0,602	0,621	0,640
0,160	—	—	-0,19	—	-0,18	—	-0,17	-0,16	—	-0,16
	0,474	0,493	0,512	0,532	0,551	0,570	0,588	0,607	0,626	0,644
0,180	0,21	—	—	—	—	—	—	—	0,16	—
	0,480	0,499	0,518	0,537	0,556	0,575	0,593	0,612	0,631	0,649
0,200	0,83	0,80	0,77	0,56	0,54	0,52	0,50	0,49	0,32	0,46
	0,487	0,506	0,525	0,543	0,562	0,580	0,599	0,617	0,635	0,654

Tabela IV.10 - Valores de b_e / l_2 interpolados, $l_1 / l_2 = 1$ ($\nu = 0,15$)

$\frac{c_1}{l_1}$	c_2 / l_1								Erro relativo (%)	
	Valor interpolado									
	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160	0,180	0,200
0,020	1,52	—	-0,44	-0,42	—	-0,26	-0,25	—	0,35	1,03
	0,600	0,636	0,672	0,707	0,743	0,771	0,800	0,828	0,856	0,885
0,040	-0,61	-1,31	-1,52	-1,32	-0,89	-0,99	-0,96	-0,70	-0,23	-0,33
	0,648	0,680	0,712	0,745	0,777	0,803	0,828	0,854	0,880	0,905
0,060	0,58	—	-0,26	-0,38	—	-0,24	-0,23	—	0,33	0,87
	0,695	0,724	0,753	0,781	0,810	0,833	0,856	0,879	0,902	0,925
0,080	—	-0,53	-0,64	-0,62	-0,36	-0,59	-0,46	0,34	—	0,65
	0,718	0,745	0,772	0,798	0,825	0,846	0,868	0,889	0,910	0,932
0,100	0,41	—	-0,25	-0,24	—	-0,12	-0,23	—	0,33	0,64
	0,740	0,765	0,790	0,815	0,840	0,860	0,879	0,899	0,919	0,938
0,120	0,13	-0,26	-0,37	-0,36	-0,12	-0,23	-0,34	-0,22	0,22	0,54
	0,751	0,775	0,799	0,822	0,846	0,865	0,883	0,902	0,921	0,939
0,140	0,53	—	-0,25	-0,12	—	-0,23	-0,22	—	0,22	0,64
	0,762	0,784	0,806	0,829	0,851	0,869	0,887	0,905	0,923	0,941
0,160	0,26	-0,13	-0,25	-0,36	-0,12	-0,23	-0,22	—	-0,33	-0,64
	0,765	0,787	0,809	0,830	0,852	0,870	0,887	0,905	0,923	0,940
0,180	0,39	—	-0,25	-0,12	—	-0,11	-0,11	—	0,22	0,64
	0,768	0,789	0,810	0,832	0,853	0,870	0,887	0,904	0,921	0,938
0,200	0,78	0,38	0,25	0,12	0,35	0,11	0,11	0,22	0,44	0,75
	0,771	0,792	0,813	0,833	0,854	0,871	0,887	0,904	0,921	0,937

Tabela IV.11 - Valores de b_0/l_2 interpolados, $l_1/l_2 = 2$

($\nu = 0,15$)

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES

V.1 - Conclusões Finais

Valores para a largura efetiva de lajes foram obtidos através do método dos elementos finitos e algumas tabelas construídas com o intuito de proporcionar um acesso rápido para o caso típico de um painel interno de lajes sem vigamento. Alguns métodos foram também estudados e reproduzidos valores obtidos através deles.

As figuras V.1a e V.1b mostram larguras efetivas de um painel interno de lajes com colunas quadradas de forma que uma comparação foi possível.

Os valores encontrados através do método proposto por KHAN e SBAROUNIS [3] foram obtidos principalmente por meio de análise experimental. De todos os aqui estudados este é o trabalho mais antigo e as técnicas empregadas em ambos os estudos experimental e teórico foram relativamente simples, apresentando pouca precisão. Por consequência não constam nas figuras V.1a e V.1b. Ao se comparar os valores obtidos na referência [3] com os obtidos através do método dos elementos finitos, do presente trabalho, chega-se à conclusão que a largura efetiva em [3] foi subestimada com erro relativo superior a 29% para alguns casos.

Ao observar-se as figuras V.1a e V.2a nota-se que, de forma geral, a largura efetiva cresce quando a

relativa da coluna (c_1/l_1) aumenta. Entretanto, os valores divergem com diferenças consideráveis entre os métodos.

FRASER [4] apresenta valores da largura efetiva desprezando a influência da razão c_1/l_1 . Este procedimento parece razoável no caso em que $l_1/l_2 = 1$ e a coluna é quadrada. Porém, já se percebe uma discrepância maior quando se compara com valores obtidos no presente trabalho para altos valores de c_1/l_1 (figura V.1a). O mesmo não ocorre quando $l_1/l_2 = 2$, onde essa discrepância se torna bem maior para todos os valores encontrados (figura V.1b), isso sem levar em conta que o autor [4] considera um um módulo de Poisson nulo em suas análises.

Os resultados apresentados por PECKNOLD [5] foram deduzidos considerando-se a área de conexão da laje com a viga equivalente nula, e, por sua vez, são bem maiores que os apresentados nas tabelas IV.1, IV.2 e IV.5 a IV.9. PECKNOLD [5] concluiu que variando-se a largura da coluna de 1/2 a 2 vezes a outra dimensão, a largura efetiva da laje varia menos de 2%. Todavia esta porcentagem é em muito inferior a encontrada através dos resultados aqui obtidos por meio de elementos finitos.

Como PECKNOLD [5], ALLEN e DARVALL [6] apresentam valores que superestimam a largura efetiva quando é feita a mesma comparação. As larguras efetivas de laje obtidas por ALLEN e DARVALL [6] mostram que a largura efetiva depende principalmente da razão c_1/l_1 e menos da razão c_2/l_1 , o que não parece lógico do ponto de vista físico, uma vez que aumentando-se a largura relativa da coluna (c_2/l_1), aumenta-se a rigidez da laje à flexão.

Além disto, por meio dos elementos finitos chegou-se neste trabalho à conclusão oposta.

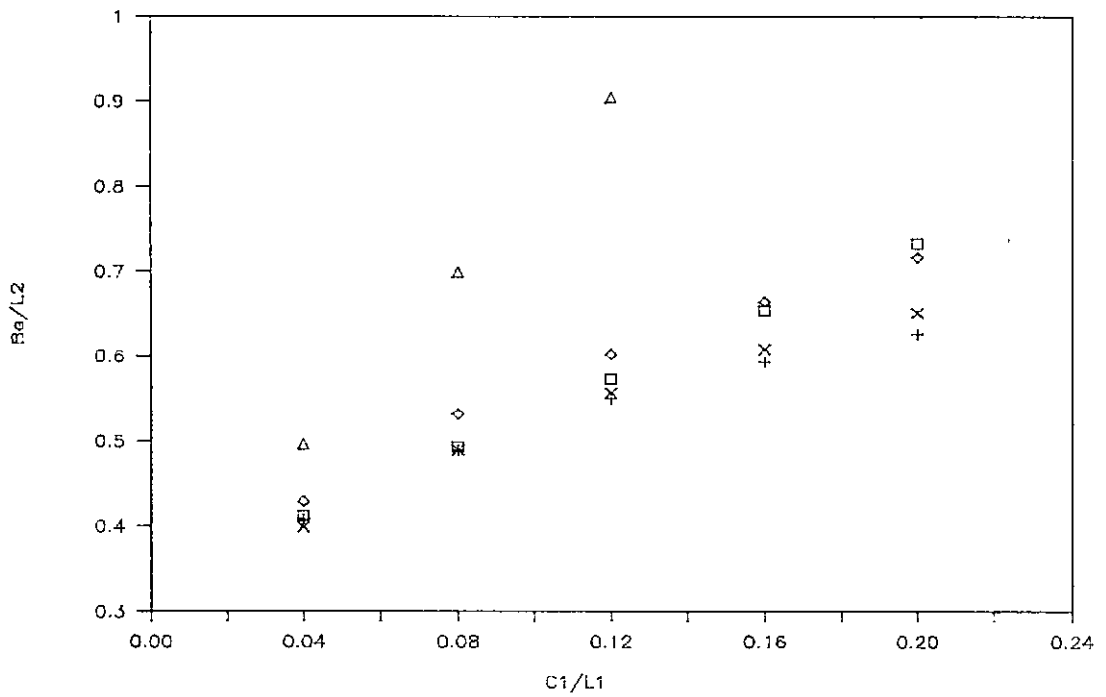
As larguras efetivas encontradas utilizando-se elementos finitos parecem concordar melhor com os valores apresentados por WONG e COULL [7], onde o maior erro relativo não ultrapassou 5,1% para os casos em que as dimensões da coluna em relação ao vão longitudinal da laje c_1/l_1 são consideravelmente grandes, para lajes quadradas e retangulares, com l_1/l_2 igual a 2.

V.2 - Sugestões

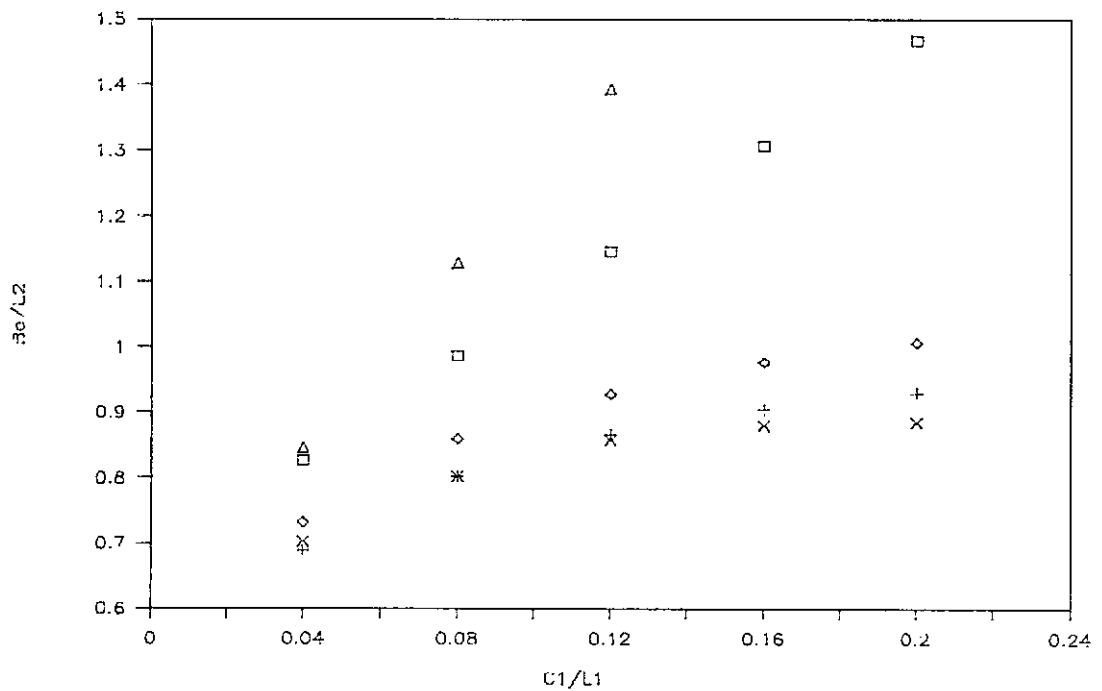
Uma sugestão interessante e necessária para que se possa avaliar melhor a precisão dos valores obtidos neste trabalho é uma análise experimental do comportamento estrutural das lajes sem vigamento sujeitas a carregamento lateral.

Muitos outros estudos seriam de grande valor como o da influência, na largura efetiva da laje, da presença de uma caixa de elevador ou de vigas ao redor do pavimento. A determinação de larguras efetivas de lajes para pórticos externos também é uma sugestão.

Por fim, vale salientar que os valores obtidos nas tabelas IV.1, IV.2 e IV.5 a IV.9 podem ser muito úteis aos escritórios de projeto, uma vez que proporcionam um rápido acesso a valores de larguras efetivas de lajes, para um intervalo grande de configurações de lajes, com uma boa precisão.



a) $l_1/l_2 = 1$



b) $l_1/l_2 = 2$

\square FRASER + E. FINITOS \diamond ALLEN/DARVALL Δ PECKNOLD x WONG/COULL

Figura V.1 - Comparação de valores de larguras efetivas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE , Building Code Requirements for Reinforced Concrete, American Concrete Institute, Detroit, ACI Standard 318-77, 1977.
- [2] BRITISH STANDARDS INSTITUTION, The Structural Use of Concrete, British Standards Institution, London, CP 110, part 1, 1972.
- [3] KHAN, F. R. e SBAROUNIS, J. A. , "Interaction of Shear Walls and Frames", Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, 90, ST 3, pp. 307-312, 1964.
- [4] FRASER, D. J. , "Effective Widths of Laterally Loaded Flat Plate Floors", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 75, pp. 103-111, 1983.
- [5] PECKNOLD, D. A. , "Slab Effective Width For Equivalent Frame Analysis", Journal of The American Concrete Institute, 72, pp. 135-137, 1975.
- [6] ALLEN, F. H. e DARVALL, P. , "Lateral Load Equivalent Frame", Journal of The American Concrete Institute, 74, pp. 294-299, 1977.

- [7] WONG, Y. C. e COULL, A., "Effective Slab Stiffness in Flat Plate Structures", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 69, pp. 721-735, 1980.
- [8] TIMOSHENKO, S. e WOINOWSKY-KRIEGER, S., Theory of Plates and Shells, New York, McGraw Hill Book Company, 1959.
- [9] PARK, R. e GAMBLE, W. L., Reinforced Concrete Slabs, New York, John Wiley and Sons, 1980.
- [10] SIMMONDS, S. H. e MISIC, J., "Design Factors for the Equivalent Frame Method", Journal of the American Concrete Institute, 68, pp. 825-831, 1971.
- [11] VANDERBILT, D. M., "Equivalent Frame Analysis for Lateral Loads", Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, 105, ST 10, pp. 1981-1997, 1979.
- [12] AALAMI, B., "Moment-Rotation Relation Between Column and Slab", Journal of the American Concrete Institute, 69, pp. 263-269, 1972.
- [13] ALLEN, F. H., DARVALL, P. LeP., "Discussion of Slab Effective Width for Equivalent Frame Analysis" by David A. Pecknold, Journal of the American Concrete Institute, 72, pp. 583-585, 1975.

- [14] BEER, F. P. e JOHNSTON, E. R., JR., Mechanics of Materials, New York, McGraw Hill Book Company, 1981.
- [15] MAST, P. E., "Stresses in Flat Plates Near Columns", Journal of the American Concrete Institute, 67, pp. 761-768, 1970.
- [16] MAST, P. E., "Plate Stresses at Columns Near the Free Edge", Journal of the American Concrete Institute, 67, pp. 898-902, 1970.
- [17] COULL, A. e WONG, Y. C., "Coupling Action of Slabs in Hull-Core Structures", Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineers 110, pp. 213-227, 1984.
- [18] MEHRAN, M. e AALAMI, B., "Rotational Stiffness of Concrete Slabs", Journal of the American Concrete Institute, 71, pp. 429-435, 1974.
- [19] VANDERBILT, M. D. e CORLEY, W. G., "Frame Analysis of Concrete Buildings", Concrete International, American Concrete Institute, 5, pp. 33-43, 1983.
- [20] FRASER, D. J., "Equivalent Frame Method for Beam-Slab Structures", Journal of the American Concrete Institute, 74, pp. 223-228, 1977.

- [21] FRASER, D. J., "The Equivalent Frame Method Simplified for Beam and Slab Construction", Concrete International : Design and Construction, 4, pp. 66-73, 1982.

- [22] LONG, A. E., "Discussion on Effective Slab Stiffness in Flat Plate Structures", by Y. C. Wong e A. Coull, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 71, part 2, pp. 571-573, 1981.

- [23] LONG, A. E. e CLELAND, D. J., "An Equivalent Frame Method for Slab-Column Structures", The Structural Engineer, 59A, pp.161-166, 1981.

- [24] NETH V. W. et al, "Behaviour of Models of a Reinforced Concrete Flat Plate Edge-Column Connection", Journal of the American Concrete Institute, 78, pp. 269-275, 1981.

- [25] KHAN, F. R. e AMIN, N. R., "Analysis and Design of Framed Tube Structures for Tall Concrete Building", The Structural Engineer, 51, pp. 85-92, 1973.

- [26] ELIAS, Z. M., "Discussion on Equivalent Frame Analysis for Lateral Loads", by M. Daniel Vanderbilt, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, 106, ST 7, pp. 1671-1672, 1980.

- [27] ELIAS, Z. M., "Sidesway Analysis of Flat Plate Structures", Journal of the American Concrete Institute, 76, pp.421-442, 1979.
- [28] ELIAS, Z. M., "Lateral Stiffness of Flat Plate Structures", Journal of the American Concrete Institute, 80, pp.50-54, 1983.
- [29] DARWISH, M. N., "Discussion on Lateral Stiffness of Flat Plate Structures, by Ziad M. Elias, Journal of the American Concrete Institute, 80, p. 547, 1983.
- [30] MANOLAKOS, D., "Lower-bound Solutions for Laterally Loaded Rectangular Plates", IABSE Periodica, 4/1984, Proceedings, pp. 109-116, 1984.
- [31] BATHE, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.
- [32] RAMELLA, S. E., Larguras Efetivas em Lajes Cogumelo, Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1981.
- [33] TIMOSHENKO, S. P. e GOODIER, J. N., Teoria da Elasticidade, Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.

- [34] SZILARD, R., Theory of Plates, New Jersey,
Prentice-Hall, Inc., 1984.